PRÜFUNG ANALYSIS 2
FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN
28. APRIL 2023
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Total
Punkte	10	10	10	10	10	50

Aufgabe 1: Das Höhenprofil eines Nationalparkes wird in guter Näherung beschrieben durch die Funktion

$$z = f(x,y) = 100 - \Big((x-4)^2 + 2(y-3)^2\Big).$$

(i) Eine Wanderung findet im Nationalpark statt, welche gegeben ist durch die Kurve $\overrightarrow{r}(t)$, welche die x- und y-Koordinaten in Abhängigkeit der Zeit t (in Stunden) beschreibt:

$$\overrightarrow{r} : [0,8] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Man finde eine Funktion $F(t)$, welche die Höhe während der Wanderung in Abhängigkeit der Zeit beschreibt.

(ii) Zu welcher Zeit wird die maximale Höhe während der Wanderung erreicht? Man finde diese Höhe.

(iii) Man beschreibe das Gebiet indem man Höhenlinien skizziert.

Lösung 1:

(i) Die Höhe z in Abängigkeit der Zeit t ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(t) = f(\overrightarrow{r}(t)) = f(t,t) &= 100 - \Big((t-4)^2 + 2(t-3)^2\Big) \\ &= 66 - 3t^2 + 20t \end{aligned}$$

(ii) Die Bedingung

$$\frac{dF}{dt}(t) = -6t + 20 \overset{!}{=} 0$$

ergibt $t = 10/3$, i.e. die maximale Höhe wird nach drei Stunden und 20 Minuten erreicht. Die erreichte Höhe zu dieser Zeit ist

$$F(10/3) = \frac{298}{3}.$$

(iii) Die Höhenlinien sind gegeben durch die Gleichung

$$100 - \Big((x-4)^2 + 2(y-3)^2\Big) = C.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(x-4)^2 + 2(y-3)^2 = C.$$

Somit sind die Höhenlinien Ellipsen mit Zentrum bei $(4,3)$ und die horizontalen Halbachsen sind um $\sqrt{2}$ länger als die vertikalen Halbachsen.

Aufgabe 2: Die Ableitung einer Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(1,2)$ in Richtung zum Punkt $(2,2)$ ist 2 und die Ableitung von $f(x,y)$ im Punkt $(1,2)$ in Richtung zum Punkt $(1,1)$ ist -2.

(i) Man bestimme
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2).$$
(ii) Man bestimme die Ableitung von $f(x,y)$ im Punkt $(1,2)$ in Richtung zum Punkt $(4,6)$.
(iii) Man bestimme die Richtung, in welche die Funktion $f(x,y)$ vom Punkt $(1,2)$ aus am stärksten abfällt.

Lösung 2:

(i) Sei $\vec{e}_1$ der Differenzvektor vom Punkt $(1,2)$ zum Punkt $(2,2)$ und sei $\vec{e}_2$ der Differenzvektor vom Punkt $(1,2)$ zum Punkt $(1,1)$. Wir haben somit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$. und somit folgt
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} = 2, \qquad \vec{e}_2 \cdot \vec{\nabla} f = -\frac{\partial f}{\partial y} = -2.$$
(ii) Der Richtungsvektor vom Punkt $(1,2)$ zum Punkt $(4,6)$ ist $\vec{e} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Wir haben somit
$$\vec{e} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \frac{14}{5}.$$
(iii) Die Richtung vom Punkt $(1,2)$ aus, in welche die Funktion $f(x,y)$ am stärksten abfällt ist entgegengesetzt der Richtung des Gradienten in diesem Punkt. Der dazugehörige Richtungsvektor ist
$$\vec{e} = -\frac{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Wir nehmen an dass $b^2 - 4c > 0$ und betrachten die quadratische Gleichung
$$x^2 + bx + c = 0.$$
Sei r die gössere der beiden Lösungen dieser Gleichung. Im folgenden betrachten wir r in Abhängigkeit von b und c.

(i) Man finde einen Ausdruck, welcher kleine Abweichungen Δr in Abhängigkeit von kleinen Abweichungen der Koeffizienten Δb und Δc beschreibt.
(ii) Man benutze den Ausdruck in (i) um einen approximativen Wert der grösseren Nullstelle der Gleichung
$$x^2 - 7.01x + 11.98 = 0$$
zu bestimmen. Man vereinfache die Lösung so weit wie möglich.

Lösung 3:

(i) Mit der Mitternachtsformel ist die grössere der beiden Nullstellen
$$r = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$
Für die Approximation von Δr verwenden wir die Linearizierung
$$\Delta r \approx \left(\frac{\partial r}{\partial b}\right)_0 \Delta b + \left(\frac{\partial r}{\partial c}\right)_0 \Delta c,$$
Wobei $\Delta r = r - r_0$, $\Delta b = b - b_0$, $\Delta c = c - c_0$. Mit
$$\frac{\partial r}{\partial b} = -\frac{1}{2} + \frac{b}{2\sqrt{b^2 - 4c}}, \qquad \frac{\partial r}{\partial c} = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4c}}$$

haben wir

$$\Delta r \approx \left(-\frac{1}{2} + \frac{b_0}{2\sqrt{b_0^2 - 4c_0}}\right)\Delta b - \frac{1}{\sqrt{b_0^2 - 4c_0}}\Delta c.$$

(ii) Wir verwenden die Linearisierung aus (i) mit

$$\begin{aligned} b &= -7.01, & b_0 &= -7, & \Delta b &= b - b_0 = -0.01, \\ c &= 11.98, & c_0 &= 12, & \Delta c &= c - c_0 = -0.02 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\Delta r \approx -4(-0.01) - (-.02) = 0.06.$$

Zusammen mit

$$r_0 = -\frac{b_0}{2} + \frac{\sqrt{b_0^2 - 4c_0}}{2} = 4$$

erhalten wir

$$r = r_0 + \Delta r \approx 4 + 0.06 = 4.06.$$

Aufgabe 4: Es sei eine Funktion $f(x, y)$ und ein Punkt (x_0, y_0) gegeben.

(i) Man finde eine Funktion $g(x, y, z)$, so dass der Graph $z = f(x, y)$ eine Niveaufläche von $g(x, y, z)$ ist.

(ii) Man finde eine Gleichung der Tangentialebene an den Graph $z = f(x, y)$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ indem man verwendet, dass der Gradient $\vec{\nabla} g$ senkrecht auf Niveauflächen von $g(x, y, z)$ und somit senkrecht auf dem Graph $z = f(x, y)$ steht.

Lösung 4:

(i) $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Dann entspricht $g(x, y, z) = 0$ dem Graphen $z = f(x, y)$.

(ii) Wir haben $\vec{\nabla} g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$. Dieser Gradient steht senkrecht auf dem Graphen $z = f(x, y)$ und somit auch senkrecht auf der Tangentialebene des Graphen $z = f(x, y)$. Die Gleichung der Tangentialebene ist somit (wir setzen $z_0 = f(x_0, y_0)$)

$$\vec{\nabla} g(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Mit $\vec{\nabla} g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$ folgt

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Aufgabe 5: Man zeige dass die Funktion

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\log(r), \quad \text{wobei} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

eine Lösung ist von der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Lösung 5: Wir betrachten die Funktion $g(x, y) = \log(r) = \log(x^2 + y^2)$. Wir haben

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Mit

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{r^2}.$$

Die zweite Ableitung ist

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x}{r^3}\frac{x}{r} = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}.$$

Analog erhält man

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{r^2 - 2y^2}{r^4}.$$

Somit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{r^2 - 2x^2 + r^2 - 2y^2}{r^4}\right) = 0.\end{aligned}$$