PRÜFUNG ANALYSIS 2
INTEGRALRECHNUNG
4. MAI 2023
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	total
Punkte	5	5	5	5	5	5	5	35

Aufgabe 1: Man bestimme:

(i)
$$\int x^{17}\,dx$$

(ii)
$$\int_1^2 \left(x^3+\frac{1}{x}\right)\,dx$$

(iii)
$$\int 0\,dx$$

(iv)
$$\int (\cos(2x)+e^{2x})\,dx$$

(v)
$$\int_0^\infty \left(1-\frac{1}{x^3}\right)\,dx$$

Lösung.

(i) $\int x^{17}\,dx = \frac{x^{18}}{18}+C$

(ii) $\int_1^2 \left(x^3+\frac{1}{x}\right)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}+\log(x)\right)\Big|_1^2 = 4+\log(2)-\frac{1}{4}$

(iii) $\int 0\,dx = C$

(iv) $\int (\cos(2x)+e^{2x})\,dx = \frac{\sin(x)}{2}+\frac{e^{2x}}{2}+C$

(v) Existiert nicht, i.e. divergiert.

Aufgabe 2: Man bestimme:

(i)
$$\int \frac{1}{x\sqrt{\log(x)}}\,dx$$

(ii)
$$\int xe^{3x}\,dx$$

(iii)
$$\int_0^1 xe^{4x^2}\,dx$$

(iv)
$$\int \frac{x-4}{x^2+x}\,dx$$

(v)
$$\frac{d}{dt}\int_t^2 \sin(x^2)\log(x)\,dx$$

Lösung.

(i) $\int \frac{1}{x\sqrt{\log(x)}}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{u}}x du = \int u^{-\frac{1}{2}}du = 2\sqrt{u}+C = 2\sqrt{\log(x)}+C$ (Substitution: $u=\log(x)$)

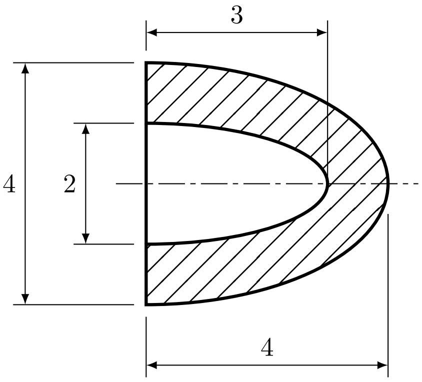
(ii) $\int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3}-\int \frac{e^{3x}}{3}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}+C$ (Partielle Integration)

(iii) $\int_0^1 xe^{4x^2}\,dx = \frac{e^{4x^2}}{8}\Big|_0^1 = \frac{e^4-1}{8}$

(iv) $\int \frac{x-4}{x^2+x}\,dx = \int \frac{x}{x^2+x}\,dx - 4\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 4\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \log(x+1)-4\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\,dx =$ $5\log(x+1)-4\log(x)+C$, wobei wir die Partialbruchzerlegung $\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ verwendet haben.

(v) $\frac{d}{dt}\int_t^2 \sin(x^2)\log(x)\,dx = -\frac{d}{dt}\int_2^t \sin^2(x)\log(x)\,dx = -\sin^2(t)\log(t)$

Aufgabe 3: Wir betrachten einen Rotationskörper dessen Mantelfächen durch halbe Ellipsen, welche entlang ihrer grossen Halbachse rotiert werden, gebildet wird. Die folgende Grafik zeigt einen Schnitt durch den Körper:



Man finde das Volumen.

Hinweis: Die Gleichung einer Ellipse mit Zentrum im Ursprung und Halbachsen a und b ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Lösung 3: Die Gleichungen der beiden Ellipsen sind

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Aufgelöst nach y

$$y_2(x) = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}, \qquad y_1(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}.$$

Das Volumen ist

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx - \pi \int_0^3 \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx \\ &= \pi \left(\left(4x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^4 - \left(x - \frac{x^3}{27}\right)\Big|_0^3 \right) = \ldots = \frac{26\pi}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Man bestimme das Integral

$$\int_1^3 (2 - x)\, dx$$

mit Hilfe von Riemannschen Obersummen. Hinweis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung 4: Die Funktion ist fallend. Für die Obersumme verwenden wir somit für die ξ's die x-Werte an den linken Intervallberandungen:

$$\begin{aligned} \xi_i &= 1 + (i-1)\frac{3-1}{n} \\ &= 1 + (i-1)\frac{2}{n}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} f(\xi_i) &= -\xi_i + 2 \\ &= -1 - (i-1)\frac{2}{n} + 2 \\ &= 1 - (i-1)\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Die Obersumme ist somit

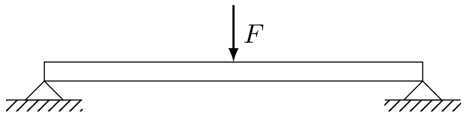
$$\overline{S}_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-(i-1)\frac{2}{n}\right)\\
&= \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1-\sum_{i=1}^{n}i\frac{2}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\right)\\
&= \frac{2}{n}\left(n-\frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2}+2\right)\\
&= 2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{4}{n}.
\end{aligned}
$$

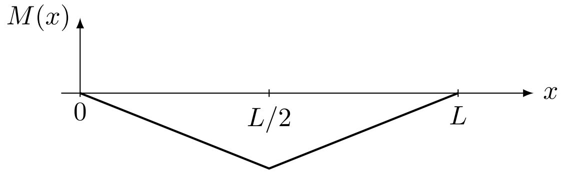
Somit haben wir

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = 2-2 = 0.$$

Aufgabe 5: Ein beidseitig aufgelegter Balken der Länge L wird in der Mitte wie folgt mit einer Einzelkraft F belastet:



Sei x die Koordinate entlang des Balkens, so dass $x = 0$ mit dem linken Balkenende übereinstimmt. Durch die vorhandene Belastung ergibt sich das folgende Drehmoment $M(x)$ im Balkenquerschnitt:

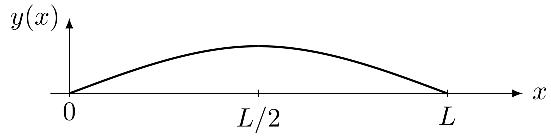


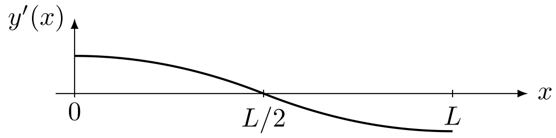
Die Auslenkung $y(x)$ des Balkens ist gegeben durch die Gleichung

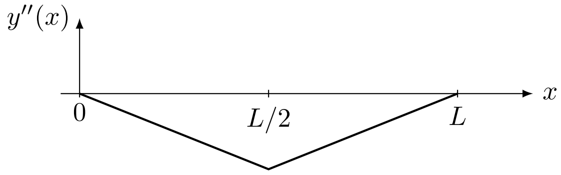
$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI},$$

wobei wir mit E den E-Modul des Materials des Balkens und mit I das Flächenmoment zweiter Ordnung des Balkenquerschnitts bezeichnen. Wir nehmen an dass gilt: EI = konstant. Man übertrage $M(x)$ auf ein Blatt und bestimme grafisch und qualitativ $y'(x)$ und die Auslenkung $y(x)$.

Lösung 5: Die zweite Ableitung $y''(x)$ ist bis auf einen konstanten Faktor gegeben durch $M(x)$, i.e. der Graph hat das gleiche qualitative Verhalten. Zweimal grafisch aufleiten ergibt:







Die vertikale Verschiebung für $y'(x)$ muss so gewählt werden dass $y'(L/2) = 0$. Begründet wird dies entweder durch Symmetrie der Auslenkung $y(x)$ bezüglich $x = L/2$, oder durch die Randbedingungen $y(0) = y(L) = 0$, welche einen Punktsymmetrischen (bezüglich dem Punkt $(L/2, 0)$) Graphen für $y'(x)$ voraussetzen. Bemerkung: Es wird die Konvention verwendet dass $y(x) > 0$ einer Auslenkung des Balkens nach unten entspricht.

Aufgabe 6: Man bestimme:

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y}\, dydx$$

Hinweis: Man vertausche die Integrationsreihenfolge.

Lösung 6: Umkehren der Integrationsreihenfolge ergibt:

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y} dydx = \int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin(y)}{y} dxdy = \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y} x\Big|_0^y dy = \ldots = 2.$$

Aufgabe 7: Man bestimme:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{3/\cos(\varphi)} \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}\, rdrd\varphi.$$

Lösung 7: Wir führen die Integration in kartesischen Koordinaten durch:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{3/\cos\varphi} \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} rdrd\varphi = \int_0^3 \int_{-x}^x \frac{y^2}{x^2} dydx = \int_0^3 \frac{1}{x^2} \frac{y^3}{3}\Big|_{-x}^x dx = \ldots = 3.$$