PRÜFUNG ANALYSIS 2
FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN
9. JUNI 2023
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Total
Punkte	10	10	10	10	10	50

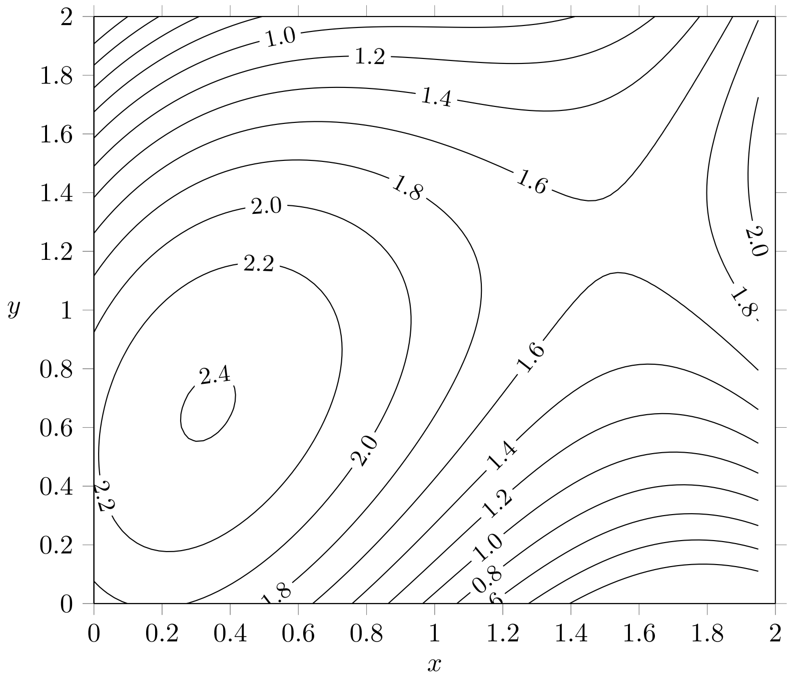
Aufgabe 1:

(i) Sei $f(x,y)$ eine gegebene Funktion und sei $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor. Man zeige dass der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ D_{\vec{e}} f \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt tangential zum Graphen $z = f(x,y)$ ist.

(ii) Die folgende Grafik zeigt Höhenlinien einer Funktion $g(x,y)$:



Die Zahlen auf den Höhenlinien entsprechen dem Wert der Funktion entlang dieser Höhenlinie. Man lese aus dieser Grafik approximativ die Koordinaten von den Punkten heraus, in welchen

(a) ein Maximum vorliegt,
(b) ein Sattelpunkt vorliegt,
(c) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$ und $g(x,y) = 1.8$,
(d) $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$ und $g(x,y) = 2.2$.
(e) Welche Eigenschaft erfüllt g'' im Punkt aus (b)?

Lösung 1:

(i) Die Tangentialebene an den Graphen $z = f(x,y)$ besitzt den Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ D_{\overrightarrow{e}} f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

I.e. der Vektor $\overrightarrow{v}$ steht senkrecht zum Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ und liegt somit in der Tangentialebene, i.e. ist tangential zum Graphen.

(ii) (a) $(0.3, 0.7)$
(b) $(1.5, 1.25)$
(c) $(0.6, 1.5)$
(d) $(0.7, 0.8)$ und $(0, 0.5)$
(e) Die beiden Eigenwerte von g'' besitzen unterschiedliche Vorzeichen.

Aufgabe 2: Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = (y+1)^2 + (x-1)^2$$

in dem Gebiet

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } x \geq 0\Big\}.$$

Man finde das Maximum und Minimum von $f(x, y)$ in D,

(i) ohne zu rechnen. Hinweis: Man betrachte Höhenlinien,
(ii) rechnerisch, indem man die Analyse wie im Unterricht besprochen durchführt.

Lösung 2:

(i) Beim Gebiet handelt es sich um die rechte Hälfte des Kreises mit Radius 2 und Zentrum im Ursprung. Die Höhenlinien sind Kreise mit Zentrum bei $(1, -1)$ und dort befindet sich somit auch das Minimum. Die obere Ecke des Halbkreises bei $(0, 2)$ ist am weitesten vom Punkt $(1, -1)$ weg und somit befindet sich dort das Maximum. Das Minimum beträgt $f(1, -1) = 0$ und das Maximum beträgt $f(0, 2) = 10$.

(ii) Die inneren kritischen Punkte werden gefunden durch

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \overrightarrow{0}.$$

Dies ergibt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ mit $f(1, -1) = 0$.

Der rechte Rand wird parameterisiert durch

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Wir untersuchen somit die Funktion

$$\begin{aligned} g(t) = f(\overrightarrow{r}(t)) &= (2\sin(t) + 1)^2 + (2\cos(t) - 1)^2 \\ &= 6 + 4(\sin(t) - \cos(t)). \end{aligned}$$

$g'(t) = 4(\cos(t) + \sin(t)) = 0$ ergibt $t = -\pi/4$, i.e. der kritische Punkt ist bei $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Der dazughörige Funktionswert ist $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$.

In den Eckpunkten sind die Funktionswerte $f(0, 2) = 9$, $f(0, -2) = 2$.

Entlang des linken Randes des Halbkreises ist die Funktion $h(y) = f(0, y) = y^2 + 2y + 2$. $h'(y) \stackrel{!}{=} 0$ ergibt $y = -1$, i.e. der kritische Punkt liegt bei $(0, -1)$ und der dazugehörige Funktionswert ist $f(0, -1) = 1$.

Vergleicht man die erhaltenen Werte, so ergeben sich für die Orte und Werte des Maximums und Minimums die gleichen Resultate wie in (i).

Aufgabe 3: Wir nehmen an dass $b^2 - 4c > 0$ und betrachten die quadratische Gleichung

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Sei r die gössere der beiden Lösungen dieser Gleichung. Im folgenden betrachten wir r in Abhängigkeit von b und c.

(i) Man finde einen Ausdruck, welcher kleine Abweichungen Δr in Abhängigkeit von kleinen Abweichungen der Koeffizienten Δb und Δc beschreibt.

(ii) Man benutze den Ausdruck in (i) um einen approximativen Wert der grösseren Nullstelle der Gleichung

$$x^2 - 7.01x + 11.98 = 0$$

zu bestimmen. Man vereinfache die Lösung so weit wie möglich.

Lösung 3:

(i) Mit der Mitternachtsformel ist die grössere der beiden Nullstellen

$$r = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Für die Approximation von Δr verwenden wir die Linearizierung

$$\Delta r \approx \left(\frac{\partial r}{\partial b}\right)_0 \Delta b + \left(\frac{\partial r}{\partial c}\right)_0 \Delta c,$$

Wobei $\Delta r = r - r_0$, $\Delta b = b - b_0$, $\Delta c = c - c_0$. Mit

$$\frac{\partial r}{\partial b} = -\frac{1}{2} + \frac{b}{2\sqrt{b^2 - 4c}}, \qquad \frac{\partial r}{\partial c} = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4c}}$$

haben wir

$$\Delta r \approx \left(-\frac{1}{2} + \frac{b_0}{2\sqrt{b_0^2 - 4c_0}}\right) \Delta b - \frac{1}{\sqrt{b_0^2 - 4c_0}} \Delta c.$$

(ii) Wir verwenden die Linearisierung aus (i) mit

$$\begin{aligned} b &= -7.01, \quad & b_0 &= -7, \quad & \Delta b &= b - b_0 = -0.01, \\ c &= 11.98, \quad & c_0 &= 12, \quad & \Delta c &= c - c_0 = -0.02 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\Delta r \approx -4(-0.01) - (-.02) = 0.06.$$

Zusammen mit

$$r_0 = -\frac{b_0}{2} + \frac{\sqrt{b_0^2 - 4c_0}}{2} = 4$$

erhalten wir

$$r = r_0 + \Delta r \approx 4 + 0.06 = 4.06.$$

Aufgabe 4: Die folgende Gleichung beschreibt den Zusammenhang von Druck p, Volumen V und Temperatur T eines idealen Gases

$$\frac{pV}{T} = k.$$

Hier ist k eine Konstante.

(i) Die obige Gleichung definiert V implizit als Funktion von T und p. Man bestimme

$$\frac{\partial V}{\partial T}$$

(ii) Analog zu (i) bestimme man

$$\frac{\partial T}{\partial p}, \qquad \frac{\partial p}{\partial V}$$

(iii) Man zeige dass

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = -1.$$

Lösung 4:

(i) Wir haben $V = kT/p$ und somit

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{k}{p}.$$

(ii) Analog finden wir aus $T = pV/k$ und $p = Tk/V$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{k}, \qquad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{kT}{V^2}.$$

(iii) Aus den erhaltenen partiellen Ableitungen folgt

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{kT}{pV} = -1,$$

wobei wir die Gleichung aus der Aufgabe verwendet haben.

Aufgabe 5: Es seien x, y, z und u vier positive Zahlen deren Summe gleich einer Konstanten C ist. Man finde das maximale Produkt dieser vier Zahlen. Man benutze die Methode der Lagrangemultiplikatoren. Es ist nicht explizit zu zeigen dass ein Maximum vorliegt.

Lösung 5: Es ist die Funktion

$$f(x, y, z, u) = xyzu$$

zu maximieren, unter der Bedingung $g(x, y, z, u) = 0$, wobei

$$g(x, y, z, u) = x + y + z + u - C.$$

Das Gleichungssystem $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, $g = 0$ ist

$$\begin{aligned} yzu &= \lambda \\ xzu &= \lambda \\ xyu &= \lambda \\ xyz &= \lambda \\ x + y + z + u &= C. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung dividiert durch die zweite ergibt $x = y$. Analog findet man $x = y = z = u$. Dies eingesetzt in der letzen Gleichung ergibt $4x = C$, i.e. $x = y = z = u = C/4$ und das maximale Produkt ist

$$f(4/C, 4/C, 4/C, 4/C) = \left(\frac{C}{4}\right)^4.$$