# ABSCHLUSSPRÜFUNG
# ANALYSIS 2 INTEGRALRECHNUNG
# 5. JULI 2023
# MUSTERLÖSUNG

**Punkteverteilung.**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 66 |

**Aufgabe 1:** Man bestimme die folgenden bestimmten Integrale:

(i)
$$\int_{-1}^{1} \left(x^4 + 3x^2 - 1\right) dx$$

(ii)
$$\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{3t} - \frac{1}{(3t)^2}\right) dt$$

(iii)
$$\int_{0}^{\infty} e^{-17s} ds$$

**Lösung 1:**

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^4 + 3x^2 - 1\right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + x^3 - x\right)\Big|_{-1}^{1} = \ldots = \frac{2}{5}$

(ii) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{3t} - \frac{1}{(3t)^2}\right) dt = \left(\frac{1}{3}\log(t) + \frac{1}{9t}\right)\Big|_{1}^{2} = \ldots = \frac{1}{3}\log(2) - \frac{1}{18}$

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-17s} ds = -\frac{1}{17}e^{-17s}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{17}$

**Aufgabe 2:** Die Beschleunigung eines Körpers in Abhängigkeit der Zeit $t$ sei

$$a(t) = 8e^{-2t} + 9\cos(3t).$$

Zur Zeit $t = 0$ hat der Körper die Geschwindigkeit $v_0 = 0$ und die Position $s_0 = 4$.

(i) Man bestimme die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers.
(ii) Man bestimme die Position $s(t)$ des Körpers.

**Lösung 2:**

(i) Wir haben

$$v(t) = -4e^{-2t} + 3\sin(3t) + C_1.$$

Die Anfangsbedingung ist

$$v(0) = -4 + C_1 \overset{!}{=} 0.$$

Somit folgt $C_1 = 4$ und

$$v(t) = -4e^{-2t} + 3\sin(3t) + 4.$$

(ii) Wir haben

$$s(t) = 2e^{-2t} - \cos(3t) + 4t + C_2.$$

Die Anfangsbedingung ist

$$s(0) = 2 - 1 + C_2 \overset{!}{=} 4.$$

Somit folgt $C_2 = 3$ und

$$s(t) = 2e^{-2t} - \cos(3t) + 4t + 3.$$

**Aufgabe 3:** Wir betrachten die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2}{3}x & -3 \le x \le 0, \\ \sqrt{4 - x^2} & 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Man bestimme für die Funktion $f(x)$ die Riemannsche Obersumme $\overline{S}_5$ im Intervall $[-3, 2]$.

(ii) Man bestimme

$$\int_{-3}^{3} (f(x) - 5)dx$$

aus bekannten Flächen.

**Lösung 3:**

(i) Wir unterteilen das Intervall $[-3, 2]$ in fünf gleichlange Teilintervalle. Die Länge der Teilintervalle ist 1 ($(2 - (-3))/5 = 1$). Für $x \le 0$ (drei Teilintervalle) muss die Funktion am rechten Rand (Funktion steigend) der Teilintervalle ausgewertet werden, i.e. bei $x = -2, -1, 0$. Für $x \ge 0$ (zwei Teilintervalle) muss die Funktion am linken Rand (Funktion fallend) der Teilintervalle ausgewertet werden, i.e. bei $x = 0, 1$. Wir haben somit

$$\begin{aligned} \overline{S}_5 &= f(-2) + f(-1) + f(0) + f(0) + f(1) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 + 2 + \sqrt{3} \\ &= 6 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(ii) Die Fläche setzt sich aus einem Rechteck, einem Dreieck und einem Viertelkreis zusammen (Achtung Vorzeichen!). Wir haben

$$\int_{-3}^{3} (f(x) - 5)dx = -\underbrace{6 \cdot 5}_{\text{Rechteck}} + \underbrace{\frac{3 \cdot 2}{2}}_{\text{Dreieck}} + \underbrace{\frac{2^2\pi}{4}}_{\text{Viertelkreis}} = -30 + 3 + \pi = -27 + \pi.$$

**Aufgabe 4:** Man bestimme die folgenden Integrale:

(i)

$$\int x^2 e^x dx$$

(ii)

$$\int \frac{2t^3 + 1}{(t^4 + 2t)^3} dt$$

**Lösung 4:**

(i) Zweifache partielle Integration ergibt:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x dx\right) = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

(ii) Substitution mit $u = t^4 + 2t$ ergibt:

$$\int \frac{2t^3 + 1}{(t^4 + 2t)^3} dt = \int \frac{2t^3 + 1}{u^3} \frac{du}{4t^3 + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(t^4 + 2t)^2} + C.$$

**Aufgabe 5:** Man löse die Gleichung

$$2x^2 = x\sin(x) + \cos^2(x)$$

indem man die rechte Seite durch ein Taylorpolynom zweiter Ordnung approximiert.

**Lösung 5:** Mit den Approximationen von Sinus und Kosinus zur zweiten Ordnung:

$$\sin(x) \approx x, \qquad \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

wird die rechte Seite der Gleichung zu

$$x\sin(x) + \cos^2(x) \approx x^2 + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 \approx x^2 + 1 - x^2 = 1$$

i.e. die Gleichung wird zu

$$2x^2 \approx 1$$

mit Lösungen

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Aufgabe 6:** Man bestimme das Doppelintegral

$$\iint_\Omega f(x,y)dA\,, \qquad \text{wobei} \qquad f(x,y) = y^2 e^{xy}$$

und $\Omega$ sei das Dreieck in der $x$-$y$-Ebene mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$, $(\frac{1}{2},1)$.

**Lösung 6:**

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y/2}^{x=y} y^2 e^{xy}dxdy &= \int_0^1 ye^{xy}\Big|_{y/2}^{y} dy \\ &= \int_0^1 \left(ye^{y^2} - ye^{y^2/2}\right) dy \\ &= \left(\frac{e^{y^2}}{2} - e^{y^2/2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - e^{1/2} + 1 = \frac{1}{2} - \sqrt{e} + \frac{e}{2}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 7:** Die relativistische Masse $m$ eines Teilchens mit Ruhemasse $m_0$ in Abhängigkeit seiner Geschwindigkeit $v$ ist gegeben durch

$$m = \gamma m_0\,, \qquad \text{wobei} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

und wir mit $c$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnen. $m_0$ und $c$ sind Konstanten. Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = mc^2 - m_0c^2.$$

Man finde einen einfachen Ausdruck für die kinetische Energie in Abhängigkeit der Geschwindigkeit $v$ unter der Voraussetzung dass $\frac{v}{c} \ll 1$, i.e. die Geschwindigkeit des Teilchens ist klein relativ zur Lichtgeschwindigkeit.

Hinweis: Die Approximation welche aus $\gamma \approx 1$ resultiert ist zu grob.

**Lösung 7:** Taylorentwicklung liefert

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \dots$$

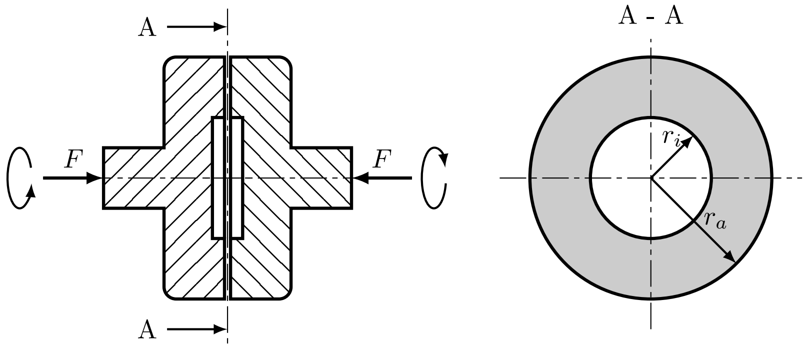
Dies verwendet für $\gamma$ ergibt

$$\gamma(v) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots$$

Dies eingesetzt im Ausdruck für die kinetische Energie ergibt

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} = m_0c^2(\gamma - 1) &= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots\right) \\ &\approx \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

**Aufgabe 8:** Zwei Kupplungshälften werden mit einer Kraft $F$ zusammengedrückt. Die Kupplungsfläche (grau) besitzt die Form eines Kreisrings mit Innenradius $r_i$ und Aussenradius $r_a$.




Der Gleitreibungskoeffizient in der Kontaktfläche ist $\mu$ und es wird davon ausgegangen dass sich die Kupplungshälften relativ zueinander bewegen (rotieren). Man bestimme das Drehmoment welches von einer Kupplungshälfte auf die andere ausgeübt wird. Hinweise:

(i) Die Reibungskraft aufgrund einer Normalkraft $F$ beträgt $\mu F$ und wirkt entgegen der Bewegungsrichtung.

(ii) Man betrachte in einem ersten Schritt ein infinitesimales Flächenelement, bestimme die Normalkraft darauf, daraus die Reibungskraft und das Drehmoment.

**Lösung 8:** Wir betrachten ein infinitesimales Flächenelement $dA$ einer Kupplungshälfte. Die Normalkraft darauf ist

$$dF = \frac{F}{A} dA.$$

Die daraus resultierende Reibungskraft ist

$$F_R = \mu dF = \mu \frac{F}{A} dA.$$

Diese wirkt in Umfangsrichtung, da das Flächenelement $dA$ sich auf einer Kreisbahn (relativ zur anderen Kupplungshälfte) bewegt. Daraus ergibt sich das Drehmoment

$$dM = r F_R = r\mu \frac{F}{A} dA,$$

wobei wir mit $r$ den radialen Abstand des Flächenelementes $dA$ zur Rotationsachse bezeichnen. Das gesamte Drehmoment erhält man nun durch Integration

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} \mu r \frac{F}{A} r dr d\varphi = \frac{\mu F}{A} \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^3}{3} \right|_{r_i}^{r_a} d\varphi = \frac{2\pi\mu F}{A} \frac{r_a^3 - r_i^3}{3} = \frac{2\mu F}{3} \frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2},$$

wobei wir im letzten Schritt $A = \pi(r_a^2 - r_i^2)$ verwendet haben.

**Aufgabe 9:** Sei $a > 0$ eine Konstante und sei $f(x)$ eine ungerade Funktion, i.e. $f(-x) = -f(x)$. Man zeige dass gilt

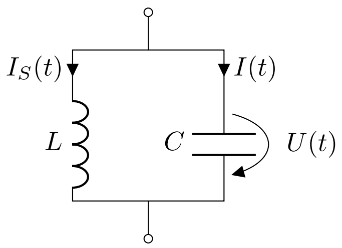
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

**Lösung 9:** Wir haben

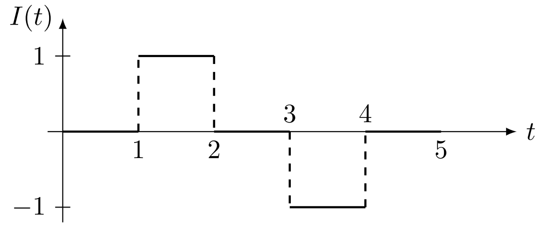
$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\
&= -\int_{0}^{-a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\
&= \int_{0}^{a} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx \\
&= -\int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0,
\end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile die Substitution $u = -x$ und von der dritten auf die vierte Zeile die Eigenschaft $f(-u) = -f(u)$ ($f$ ungerade) verwendet haben.

**Aufgabe 10:** Eine Spule mit Induktivität $L$ und ein Kondensator mit Kapazität $C$ sind parallel geschaltet:




Die dargestellte Schaltung ist als Teil eines grösseren Schaltkreises zu betrachten, welcher für die Aufgabe aber nicht relevant ist. Wir lassen im folgenden die Einheiten weg. Der Strom durch den Kondensator $I(t)$ wurde wie folgt gemessen:




(i) Es sei $C = 1$. Man skizziere (qualitativ) die Spannung am Kondensator $U(t)$ wenn der Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ entladen ist. Man bestimme die maximale Spannung am Kondensator. Hinweise:
  (a) Für diese Teilaufgabe kann der Kondensator separat betrachtet werden.
  (b) Für einen Kondensator gilt: $C = Q/U$, wobei wir mit $Q$ die Ladung auf dem Kondensator bezeichnen und der Zusammenhang zum Strom ist durch $I = \frac{dQ}{dt}$ gegeben.

(ii) Es sei $L = 1$. Man skizziere (qualitativ) den Strom durch die Spule $I_S(t)$ wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ kein Strom durch die Spule fliesst. Man bestimme den maximalen Strom durch die Spule. Hinweis: Für eine Spule gilt $U = L\frac{dI}{dt}$.

**Lösung 10:**

(i) Wir haben ($C = 1$, $U(0) = 0$)

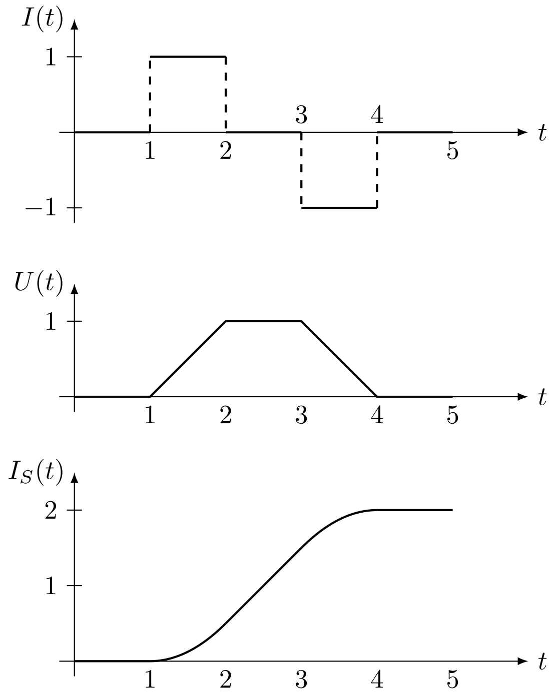
$$U(t) = U(0) + \int_0^t \frac{I(s)}{C} ds = \int_0^t I(s) ds.$$

Die maximale Spannung ist $U_{\max} = 1$. Graph siehe unten.

(ii) Die Spannung über der Spule ist die gleiche wie über dem Kondensator (Maschensatz) und

$$I(t) = I(0) + \int_0^t \frac{U(s)}{L} ds = \int_0^t U(s) ds.$$

Der maximale Strom ist $I_{S,\max} = 2$. Graph siehe unten.




**Aufgabe 11:** Sei $g(x)$ eine differenzierbare Funktion. Der Graph $y = g'(x)$ entspricht dem Halbkreis in der oberen Hälfte der $x$-$y$-Ebene, mit Zentrum im Ursprung und Radius $r = 4$. Man finde $g(-4)$, falls $g(4) = 7$ gilt.

**Lösung 11:** Die Fläche des Halbkreises unterhalb von $y = g'(x)$ ist $8\pi$. Es folgt

$$8\pi = \int_{-4}^{4} g'(x) dx = g(4) - g(-4),$$

wobei die erste Gleichung aus dem Flächeninhalt unter dem Graphen $y = g'(x)$ folgt und die zweite Gleichung aus dem Fundamentalsatz. Mit $g(4) = 7$ folgt

$$g(-4) = 7 - 8\pi.$$