ANALYSIS 1
VERSION 4. Dezember 2025

LISIBACH ANDRÉ

Das Gewicht der Vorlesung liegt auf konkreten Rechnungen und weniger auf abstrakten Formulierungen. Deshalb befinden sich im Skript viele Rechenbeispiele und weitere werden im Unterricht besprochen. Wir benutzen Kursivschrift für Begriffsdefinitionen.

1. Mengenlehre

1.1. **Grundbegriffe.** Unter einer *Menge* verstehen wir die Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte, *Elemente* genannt, zu einer Einheit. Beschreibende Darstellungsform:

$$M = \{x | x \text{ besitzt die Eigenschaften } E_1,\, E_2, \dots, E_n\},$$

aufzählende Form:

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}.$$

Mengen mit unendlich vielen Elementen, wie zum Beispiel die Menge der reellen Zahlen, sind möglich. Im folgenden bezeichnen wir die reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$. $a \in A$ bedeutet a ist Element von A, $a \notin A$ bedeutet a ist kein Element von A. Die *leere Menge* wird mit $\{\}$ oder $\emptyset$ bezeichnet. Eine Menge A heisst *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist, geschrieben $A \subset B$.

Als Beispiel betrachten wir die Teilmengen der Menge $B = \{a, b, c\}$. Die acht Teilmengen sind

$$\begin{aligned} P &= \{a\}, & Q &= \{b\}, & R &= \{c\}, \\ S &= \{a, b\}, & T &= \{b, c\}, & U &= \{a, c\}, \\ V &= \{\}, & W &= \{a, b, c\}. \end{aligned}$$

Für jede Menge B gilt:

(i) Die leere Menge ist immer eine Teilmenge der Menge B.
(ii) Die Menge B ist eine Teilmenge der Menge B.

Im folgenden werden wir häufig Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ betrachten. *Intervalle* sind zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen. Wir verwenden dafür die Notationen

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x\}, \\ (\infty, \infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Man nennt ein Intervall der Form (a, b) *offenes Intervall* und ein Intervall der Form $[a, b]$ *abgeschlossenes Intervall.*

1.2. **Mengenoperationen.**

1.2.1. *Schnittmenge.* Die Menge $A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$ heisst *Schnittmenge* der Mengen A und B.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Lösungsmenge des Ungleichungssystems:

$$\begin{cases} 2x - 4 < 8 \\ x + 1 > -2 \end{cases}$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $x < 6$. Wir bezeichnen die Menge der x welche die erste Ungleichung erüllt mit $\mathbb{L}_1$. Somit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1 &= \{x | x \in \mathbb{R}, x < 6\} \\ &= (-\infty, 6). \end{aligned}$$

Aus der zweiten Ungleichung folgt $x > -3$. Wir bezeichnen nun die Menge der x welche die zweite Ungleichung erfüllt mit $\mathbb{L}_2$. Somit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_2 &= \{x | x \in \mathbb{R}, x > -3\} \\ &= (-3, \infty). \end{aligned}$$

Die Lösung des Ungleichungssystems ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \\ &= \{x | x \in \mathbb{R}, x < 6, x > -3\} \\ &= (-3, 6). \end{aligned}$$

Als weiteres Beispiel dient das Ungleichungssystem (siehe Unterricht)

$$\begin{cases} \quad x^2 \leq 9 \\ 2x - 3 \leq 1 \end{cases}$$

1.2.2. *Vereinigungsmenge.* Die Menge $A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$ ist die *Vereinigungsmenge* der Mengen A und B.

Als Beispiel betrachten wir die folgenden beiden Ungleichungen

$$x^2 \geq 1, \qquad 2x > -4.$$

Welche x erfüllen mindestens eine der beiden Ungleichungen? Die erste Ungleichung ergibt $x \geq 1$ oder $x \leq -1$. Die zweite Ungleichung ergibt $x > -2$. Somit haben wir

$$\mathbb{L}_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \qquad \mathbb{L}_2 = (-2, \infty)$$

und für die Lösungsmenge des Ungleichungssystems erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \\ &= (-\infty, \infty) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.2.3. *Differenzmenge.* Die Menge $A \backslash B = \{x | x \in A, x \notin B\}$ ist die *Differenzmenge* der Mengen A und B.

Beispiel: Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null ist $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null ist $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dann ist $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}_0 \backslash \{0\}$.

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Definitionsbereich (als Teilmenge der reellen Zahlen) der Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+3)}, \qquad g(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}.$$

Da Division durch Null nicht erlaubt ist sehen wir dass $f(x)$ nicht definiert ist für $x = -3, 1$. Somit ist der Definitionsbereich von $f(x)$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-3, 1\}.$$

Man sagt $f(x)$ besitze bei $x = -3, 1$ *Definitionslücken.* Da für reelle Funktionswerte das Argument der Wurzel nicht negativ sein darf ist $g(x)$ nur für $x \geq 0$ definiert. Der Definitionsbereich von $g(x)$ ist somit

$$\mathbb{D}_g = [0, \infty) \backslash \{1\}.$$

1.3. **Betrag einer reellen Zahl.** Der *Betrag* einer reellen Zahl a ist durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

definiert. Beispiele: $|7| = 7$, $|-9| = 9$. Die Lösung der Ungleichung $|x-7| \leq 2$ ist $\mathbb{L} = [5, 9]$. Die Lösung der Ungleichung $|x+5| \leq 2$ ist $\mathbb{L} = [-7, -3]$. Der Betrag der Differenz von $a - b$, also $|a - b|$ ist der Abstand (positiv) zwischen den Zahlen a und b.

2. Funktionen

2.1. **Definition.** Unter einer *Funktion* f versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y einer Menge B zuordnet. x nennt man *unabhängige Variable* oder *Argument.* y nennt man *abhängige* Variable oder *Funktionswert.* D heisst *Definitionsbereich* und B *Bildbereich* (oder Wertebereich) der Funktion. Die Menge aller Werte von f nennt man *Bild* von f und sie wird mit $\mathrm{Im}(f)$ bezeichnet. $\mathrm{Im}(f)$ ist eine Teilmenge von B und muss nicht gleich B sein..

Beispielsweise die Funktion $y = \sin(x)$ ordnet jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $y \in \mathbb{R}$ zu. Die Funktionswerte von $\sin(x)$ sind aber das Intervall $[-1, 1]$, i.e. $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.

Wir verwenden die Notation:

$$\begin{aligned} f : D &\to B \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Wir definieren die *Funktion einer Menge* als

$$f(A) = \{f(x) \in B | x \in A\}.$$

Wir sehen dass $f(A) \subset B$. Insbesondere gilt $f(D) = \mathrm{Im}(f)$

Im folgenden betrachten wir Funktionen deren Definitionsbereich und Bildbereich jeweils eine Teilmenge der reellen Zahlen sind.

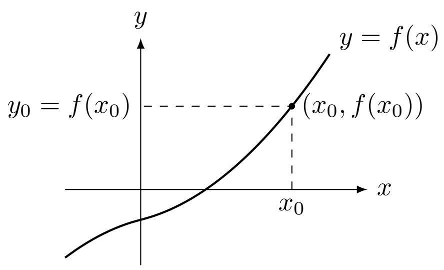
Wir können Funktionen auf verschieden Arten definieren/darstellen.

(i) Durch eine Gleichung oder Formel, z.B. $y = 2x - 1$. Dies ist die *analytische Darstellungsform.*

(ii) Eine weitere Darstellungsform einer Funktion ist die *Wertetabelle.* Diese findet zum Beispiel bei Messungen oder Auswertungen von Simulationen Anwendung. Beispiel:

x	-2	0	1	3	...
y	-5	-1	1	5	...

(iii) Es ist auch möglich die Funktion *graphisch* darzustellen. Jedem Wert $x_0 \in D$ ordnet die Funktion einen Wert $y_0 = f(x_0) \in B$ zu. Somit lassen sich Wertepaare $(x_0, f(x_0))$ bilden. Diese Wertepaare kann man als Koordinaten für Punkte in der Ebene verwenden. Die Menge aller solcher Punkte bildet den *Funktionsgraphen*:



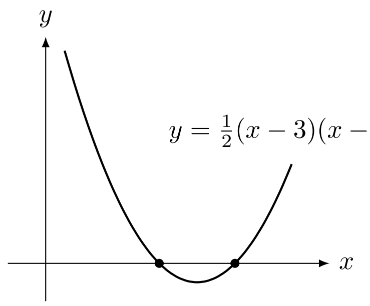
Beispiele zu grösstmöglichem Definitionsbereich und Bild einer Funktion: Die Funktion $y = x^2 + 2$ besitzt den grösstmöglichen Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und das dazugehörige Bild ist $[2, \infty)$. Die Funktion $y = \sqrt{x-3}$ besitzt den grösstmöglichen Definitionsbereich $D = [3, \infty)$ und das dazugehörige Bild ist $[0, \infty)$.

Wird nichts anderes vermerkt, ist im folgenden bei einer Betrachtung des Definitionsbereiches einer Funktion immer der grösstmögliche Definitionsbereich gemeint. Analog ist, wenn nichts anderes vermerkt ist, mit dem Bild einer Funktion immer das Bild bezogen auf den grösstmöglichen Definitionsbereich gemeint.

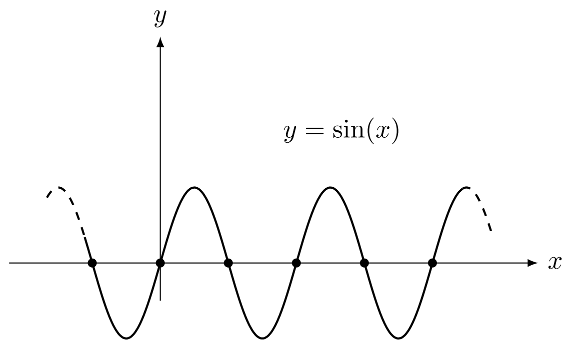
2.2. **Allgemeine Funktionseigeschaften.**

2.2.1. *Nullstellen.* Eine Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine *Nullstelle*, falls $f(x_0) = 0$ gilt. Beispiele:

(i) Die Funktion $f(x) = mx + b$ besitzt die Nullstelle $x_0 = -\frac{b}{m}$.
(ii) Die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x-5)$ besitzt die Nullstellen $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.
(iii) Die Funktion $h(x) = \sin(x)$ besitzt die Nullstellen $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

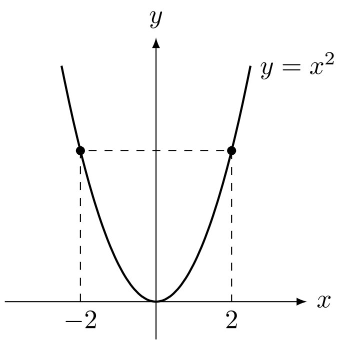


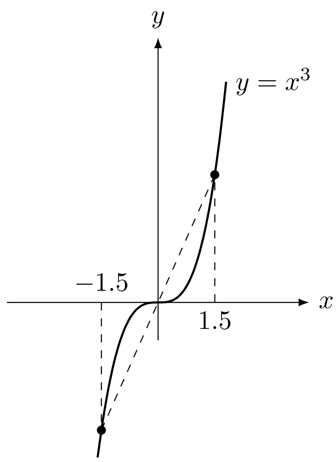
Nullstellen bei $x = 3, 5$



Nullstellen bei $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2.2.2. *Symmetrieverhalten.* Eine Funktion $f(x)$ heisst *gerade* Funktion, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt $f(-x) = f(x)$. Eine Funktion heisst *ungerade* Funktion, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt $f(-x) = -f(x)$. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist ein Beispiel einer geraden Funktion, die Funktion $f(x) = x^3$ ist ein Beispiel einer ungeraden Funktion.





Der Graph einer geraden Funktion ist spiegelsymmetrisch bezüglich einer Spiegelung an der y-Achse. Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch bezüglich einer Punktspiegelung am Ursprung.

2.2.3. *Monotonie.* Wir betrachten eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D. Seien im folgenden x_1 und x_2 Elemente in D mit $x_1 < x_2$. Die Funktion $f(x)$ heisst *streng monoton wachsend* wenn $f(x_1) < f(x_2)$ und *streng monoton fallend* wenn $f(x_1) > f(x_2)$. Die Funktion $f(x)$ heisst *monoton wachsend* wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ und *monoton fallend* wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$.

2.2.4. *Periodizität.* Eine Funktion $f : D \to B$ ist *periodisch* mit Periode p, falls $D = \mathbb{R}$ und $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Typische Beispiele für periodische Funktionen sind

$\sin(x)$ und $\cos(x)$ mit Periode $p = 2\pi$. Lässt man den ersten Teil der Definition weg, so ist auch die Funktion $\tan(x)$ periodisch mit Periode $p = \pi$.

2.2.5. *Operationen mit Funktionen.* Sei $f, g : X \to \mathbb{R}$. Dann sind die üblichen Operationen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x),\\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x),\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)},\end{aligned}$$

wobei die letzte Operation nur für x mit $g(x) \neq 0$ definiert ist.

2.2.6. *Komposition von Funktionen.* Wir betrachten eine Funktion welche zu ihrem Argument zuerst 2 addiert und den erhaltenen Ausdruck quadriert. In einer Gleichung geschrieben erhalten wir $y = (x+2)^2$. Diese Funktion können wir als Kombination der Funktionen $y = x + 2$ und $y = x^2$ schreiben. Benennen wir die Funktionen mit f und g, i.e. $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$ dann ist die kombinierte Funktion $g(f(x)) = (x+2)^2$.

Allgemeiner: Haben wir $f : A \to B$ und $g : B \to C$ (der Bildbereich von f liegt im Definitionsbereich von g). Dann kann man eine neue Funktion h definieren durch

$$\begin{aligned} h : A &\to C\\ x &\mapsto h(x) = g(f(x)).\end{aligned}$$

Diese neue Funktion heisst *Komposition* oder *Hintereinanderschaltung* von f und g. Man benutzt die folgende Notation

$$h = g \circ f, \qquad h(x) = (g \circ f)(x).$$

Bildet man beispielsweise die Komposition der Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & \qquad g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = 2x + 4, & x &\mapsto g(x) = x^3\end{aligned}$$

erhält man

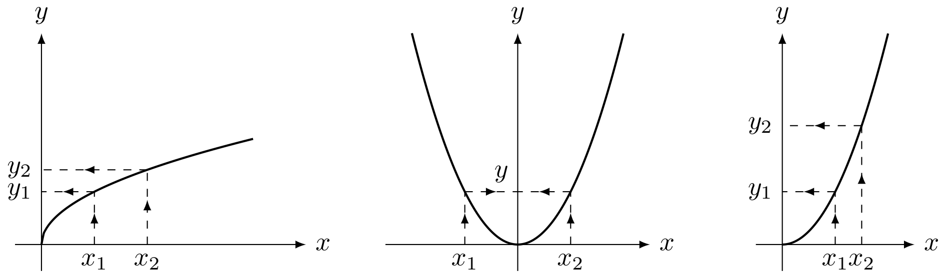
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2x^3 + 4,\\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = (2x+4)^3.\end{aligned}$$

Wir sehen dass im Allgemeinen die Komposition von Funktionen nicht kommutativ ist, i.e. im allgemeinen gilt $f \circ g \neq g \circ f$.

2.2.7. *Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.* Sei $f : D \to B$ eine Funktion.

Die Funktion $f(x)$ heisst *injektiv* genau dann, wenn zwei verschiedene Elemente von D nicht auf dasselbe Element in B abgebildet werden. Äquivalent dazu ist: Aus $f(a) = f(a')$ folgt $a = a'$.

Beispielsweise ist die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ injektiv. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ ist nicht injektiv, da beispielsweise $g(2) = g(-2) = 4$. Schränkt man diese Funktion jedoch auf das Intervall $[0,\infty)$ ein so ergibt sich eine injektive Funktion.



$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \sqrt{x}$
injektiv

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = x^2$
nicht injektiv

$h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = x^2$
injektiv

Wir sehen an Hand der Graphen: Eine Funktion $y = f(x)$ ist genau dann injektiv wenn ihr Graph jede horizontale Gerade höchstens einmal schneidet. Streng monoton fallende und streng monoton wachsende Funktionen sind injektiv.

Die Funktion $f(x)$ heisst *surjektiv* genau dann, wenn jedes Element von B im Bild von D auftritt, i.e. $\mathrm{Im}(f) = f(D) = B$.

Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2$ nicht surjektiv da kein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = -3$. Wird als Bildbereich dieser Funktion jedoch die Menge der positiven reellen Zahlen inklusive Null gewählt (i.e. wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $x \mapsto y = x^2$), so ist die Funktion surjektiv. I.e. für jedes $y \in [0,\infty)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ so dass $y = g(x)$ gilt. Die Einschränkung des Bildbereiches B einer Funktion $f : D \to B$ auf das Bild der Funktion $\mathrm{Im}(f)$ führt auf eine surjektive Funktion. I.e. jede Funktion $f : D \to \mathrm{Im}(f)$ ist surjektiv.

Die Funktion $f(x)$ heisst *bijektiv* genau dann, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Äquivalent dazu: Zu jedem $b \in B$ gibt es genau ein $a \in D$ mit $f(a) = b$. Dies führt auf den Begriff der inversen Funktion.

2.2.8. *Inverse Funktion.* Zu einer bijektiven Funktion $f : D \to B$ gibt es eine *inverse Funktion*[1] $f^{-1} : B \to D$ mit $f(f^{-1}(y)) = y$ und $f^{-1}(f(x)) = x$. Formal wird dafür die folgende Notation verwendet: $f^{-1} \circ f = I$. Hier bedeutet I die *Identität*, das ist diejenige Funktion die das Argument auf sich selbst abbildet: $I(x) = x$. Die inverese Funktion wird auch *Umkehrfunktion* genannt. Bemerkung: Es gilt auch $f \circ f^{-1} = I$.

Sei zum Beispiel $f(x) = 3x - 2$, dann gilt $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$. Man berechnet die inverse Funktion indem man in der gegebenen Funktionsgleichung $y = f(x)$ einsetzt und die entstandene Gleichung nach x auflöst. Formales vertauschen von x und y liefert die Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= 3x - 2, \\
y = f(x)&: & y &= 3x - 2, \\
\text{auflösen nach } x&: & x &= \frac{y+2}{3}, \\
\text{formales vertauschen von } x \text{ und } y&: & y &= \frac{x+2}{3}, \\
\text{somit}&: & f^{-1}(x) &= \frac{x+2}{3}.
\end{aligned}$$

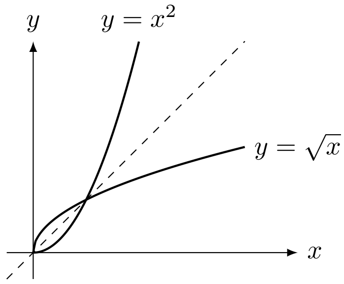
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht bijektiv und somit auch nicht umkehrbar. Die Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ ist jedoch bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist $f^{-1} = \sqrt{x}$. Grafisch kann man sich die Umkehrfunktion durch Spiegelung des Graphen

[1] Das '-1' in f^{-1} ist kein Exponent, i.e. $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

an der Geraden $\{x = y\}$ konstruieren:

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto y = x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0,\infty) &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto y = \sqrt{x} \end{aligned}$$



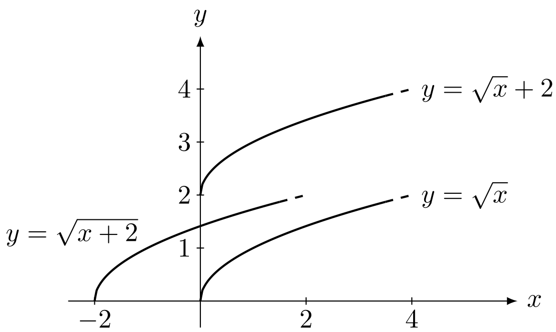
Bemerkung: Die Wurzelfunktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ wird als die inverse Funktion von $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ definiert, siehe 6 Seite 24.

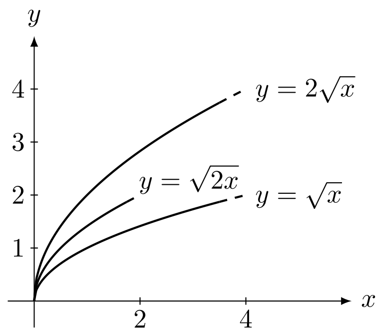
2.2.9. *Transformation von Funktionen.* Wir starten mit der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Nun betrachten wir eine neue Funktion $g(x)$ die durch $g(x) = f(x) + 2$ gegeben sei, i.e. $g(x) = \sqrt{x}+2$. Wenn wir die Graphen der beiden Funktionen vergleichen stellen wir fest dass der Graph von $g(x)$ dem um den Wert 2 in Richtung positive y-Achse verschobenen Graphen von $f(x)$ entspricht.

Nun betrachten wir den Graphen der Funktion $h(x) = f(x + 2)$, i.e. $h(x) = \sqrt{x + 2}$. Wir sehen dass der Graph von $h(x)$ dem um den Wert 2 in Richtung negativer x-Achse verschobenen Graphen der Funktion $f(x)$ entspricht.

Nun betrachten wir den Graphen der Funktion $k(x) = 4f(x)$, i.e. $k(x) = 2\sqrt{x}$. Wir sehen dass der resultierende Graph dem vertikal (also in Richtung der y-Achse) um den Faktor zwei gestreckten Graphen von $f(x)$ entspricht.

Schliesslich sehen wir dass die Funktion $l(x) = f(2x)$, ($l(x) = \sqrt{2x}$) dem um Faktor 2 in horizontale Richtung gestauchten Graphen von $f(x)$ entspricht.





Wir erweitern und verallgemeinern die Transformationen einer Funktion $f(x)$ in der folgenden Tabelle. In dieser Tabelle sei $C \geq 0$, $c > 1$

neue Funktion	Transformation von $f(x)$
$y = f(x + C)$	Horizontale Translation um den Wert C nach links
$y = f(x - C)$	Horizontale Translation um den Wert C nach rechts
$y = f(x) + C$	Vertikale Translation um den Wert C nach oben
$y = f(x) - C$	Vertikale Translation um den Wert C nach unten
$y = cf(x)$	Vertikale Streckung um Faktor c
$y = \frac{1}{c}f(x)$	Vertikale Stauchung um Faktor c
$y = f(cx)$	Horizontale Stauchung um Faktor c
$y = f(x/c)$	Horizontale Streckung um Faktor c
$y = -f(x)$	Spiegelung an der x-Achse
$y = f(-x)$	Spiegelung an der y-Achse

3. Ganzrationale Funktionen

Wir defnieren die *ganzrationalen Funktionen*, auch genannt *Polynomfunktionen*, als Funktionen der Form

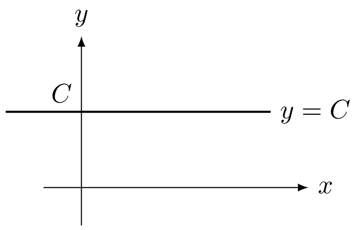
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Hier sind $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die *Polynomkoeffizienten.* Wir setzen $a_n \neq 0$ voraus. Den höchsten Exponenten n nennt man den *Polynomgrad.* Beispiele und zugehörige Bezeichungen:

$y = 4$	0. Grades	Konstante Funktion
$y = 2x - 3$	1. Grades	Lineare Funktion
$y = 2x^2 - 3x + 5$	2. Grades	Quadratische Funktion
$y = x^3 - x$	3. Grades	Kubische Funktion
$\vdots$		
$y = 4x^8 + 2x^2$	8. Grades	
$\vdots$		

Bemerkung: Das Studium der Polynomfunktionen ist wichtig weil sich viele naturwissenschaftliche und technische Vorgänge sehr gut durch Polynome approximieren lassen. Auch ist das Rechnen mit Polynomen einfach (siehe Differential- und Integralrechnung).

3.1. **Konstante Funktionen.** (Polynomfunktionen 0. Ordnung) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = C$. Wobei wir hier und im folgenden mit dem grossen Buchstaben C eine Konstante bezeichnen. Bei einer konstanten Funktion wird jedem Argument der gleiche Wert zugeordnet.



Wichtige Beispiele treten auf bei der Beschreibung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit bei einer gleichförmigen Bewegung: $v(t) = C$ (wir bezeichnen hier die Geschwindigkeit mit v und die Zeit mit t) und bei der Beschreibung der Energie eines abgeschlossenen Systems in Abhängigkeit der Zeit: $E(t) = C$ (wir bezeichnen hier die Energie mit E).

3.2. **Lineare Funktionen.** (Polynomfunktionen 1. Ordnung) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = a_1 x + a_0$. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Beispiele:

(i) Zurückgelegter Weg s in Abhängigkeit der Zeit bei gleichförmiger Bewegung mit Geschwindigket $v(t) = C$: $s(t) = Ct + s_0$, wobei s_0 der Weg zum Zeitpunkt $t = 0$ darstellt.

(ii) Geschwindigkeit v in Abhängigkeit der Zeit beim freien Fall in Erdnähe, i.e. mit Erdbeschleunigung g (konstant): $v(t) = gt + v_0$, wobei v_0 die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnet (die Anfangsgeschwindigkeit).

(iii) Hooksches Gesetz: Der Verlauf der Spannung in Abhängigkeit der Dehnung für Materialien wie zum Beispiel Stahl folgt zu Beginn mit guter Näherung einem linearen Verlauf: $\sigma = E\delta$, wobei wir hier mit σ die Spannung, mit E den (konstanten) Elastizitätsmodul und mit δ die Dehnung bezeichnen.

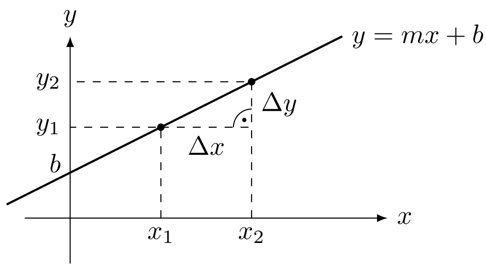
(iv) Linearisierung: Eine Funktion $f(x)$ kann (unter geeigneten Voraussetzungen) an einem Punkt $x = x_0$ linearisiert werden. Die Linearisierung beschreibt dann die Funktion $f(x)$ approximativ in einer Umgebung von $x = x_0$. (siehe Differentialrechnung).

Im folgenden werden wir alternative Formen zu $f(x) = a_1 x + a_0$ kennenlernen. Wir beschränken uns darauf die Funktionsgleichung $y = \ldots$ (oder eben Alternativen dazu) anzugeben und nehmen an der Definitions- und Bildbereich seien jeweils $\mathbb{R}$.

3.2.1. *Haupt-/Normalform.* Diese Form ist identisch mit $f(x) = a_1 x + a_0$, allerdings verwenden wir die Buchstaben m, b anstelle von a_1, a_0. Die *Haupt-/Normalform* ist somit $y = mx + b$. Man nennt m die *Steigung* und b den *y-Achsenabschnitt.* Nehmen wir an, der Graph gehe durch zwei (unterschiedliche) Punkte mit Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), dann erfüllt die Steigung m die Gleichung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Der y-Achsenabschnitt ist der Funktionswert an der Stelle $x = 0$. Im Falle $b = 0$ nennt man die Funktion eine *Proportion.*

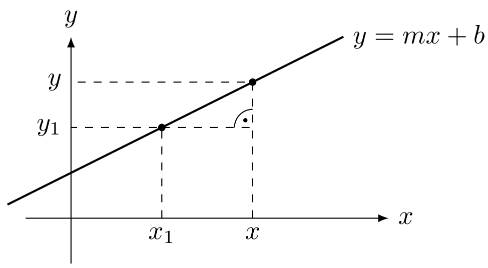


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

3.2.2. *Punkt-Steigungs-Form.* Wir nehmen an der Graph einer linearen Funktion besitzt die Steigung m und gehe durch den Punkt mit Koordinaten (x_1, y_1). Somit ist also der Parameter m in der Funktionsgleichung $y = mx + b$ direkt bekannt. Einsetzen der Koordinaten (x_1, y_1) ergibt $y_1 = mx_1 + b$, i.e. $b = y_1 - mx_1$. Somit ist die Funktionsgleichung

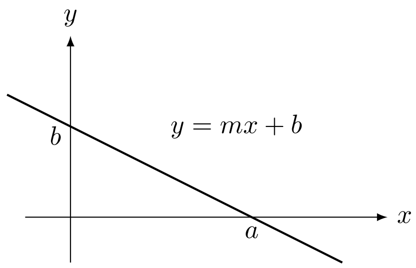
$$y = mx + (y_1 - mx_1).$$

Dies ist die Geradengleichung in *Punkt-Steigungs-Form.* Ein alternativer Weg diesen Ausdruck herzuleiten führt über die geometrische Betrachtung eines Steigungsdreieckes gegeben durch den Punkt mit Koordinaten (x_1, y_1) und einem beliebigen Punkt auf dem Graphen mit Koordinaten (x, y).



Die Steigung m erfüllt $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$. Umstellen nach y liefert wieder die obige Punkt-Steigungs-Form.

3.2.3. *Achsenabschnittsform.* Sei a der x-Achsenabschnitt und b der y-Achsenabschnitt einer Geraden. Das heisst dass die Gerade die Abszisse an der Stelle $x = a$ und die Ordinate an der Stelle $y = b$ schneidet.



Betrachtet man nun das Steigungsdreieck gebildet aus den beiden Achsenabschnittspunkten, so ergibt sich für die Steigung $m = -b/a$ und die Gleichung der Geraden lautet

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

Division durch b liefert die *Achsenabschnittsform*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Bemerkung: Diese Form macht keinen Sinn für $a = 0$ oder $b = 0$.

3.2.4. *Schnittpunkt zweier Geraden.* Wir illustrieren an einem Beispiel. Seien zwei Geraden durch die Funktionsgleichungen: $y = 2x - 6$ und $y = 4x + 2$ gegeben. Gesucht ist der *Schnittpunkt* dieser beiden Geraden. Es müssen beide Geradengleichungen erfüllt sein und somit erfüllen die Koordinaten eines Schnittpunktes das Gleichungssystem

$$\begin{cases} y = 2x - 6, \\ y = 4x + 2. \end{cases}$$

Gleichsetzen eliminiert y und liefert $x = -4$. Setzt man $x = -4$ in eine der beiden Gleichungen ein so ergibt sich $y = -14$. Der Schnittpunkt ist also durch das Koordinatenpaar $(-4, -14)$ gegeben.

3.3. **Quadratische Funktionen.** (Polynomfunktionen 2. Ordnung) *Quadratische Funktionen* sind Funktionen des Typs

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiele:

(i) Kinetische Energie eines Körpers in Abhängigkeit seiner Geschwindigkeit: $E(t) = \frac{1}{2} m v^2$, wobei wir mit E die Energie und mit m die Masse des Körpers bezeichnen.
(ii) Der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit der Zeit t bei Bewegung mit konstanter Beschleunigung a: $s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$, wobei wir mit s_0 den Zurückgelegten Weg und mit v_0 die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnen. Wir notieren dass sich bei dieser Bewegung der zurückgelegte Weg quadratisch, die Geschwindigkeit linear und die Beschleunigung konstant (in Abhängigkeit der Zeit) verhalten.

3.3.1. *Nullstellen/Quadratische Gleichungen.* Wir schreiben die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Das Aufsuchen der *Nullstellen* der Funktion ist äquivalent zur Bestimmung der Lösungsmenge der *quadratischen Gleichung* $ax^2 + bx + c = 0$. Die *Lösungsformel* wird durch quadratisches ergänzen wie folgt hergeleitet. Wir bringen den letzten Term der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ auf die rechte Seite, dividieren durch a und erhalten

$$x^2 + \frac{b}{a} x = -\frac{c}{a}.$$

Nun addieren wir $(b/2a)^2$ auf beiden Seiten um links ein vollständiges Quadrat zu erhalten (dieser Schritt wird auch als *Quadratisch Ergänzen* bezeichnet):

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

i.e.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ziehen der Wurzel ergibt

$$x_\pm + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Somit

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dies ist die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

(i) $b^2 - 4ac > 0$. In diesem Fall gibt es zwei unterschiedliche reelle Lösungen ($x_\pm \in \mathbb{R}$, $x_+ \neq x_-$).

(ii) $b^2-4ac=0$. In diesem Fall gibt es eine (doppelte) reelle Lösung ($x_+ = x_- \in \mathbb{R}$).

(iii) $b^2-4ac<0$. In diesem Fall gibt es zwei unterschiedliche komplexe Lösungen mit nicht-verschwindendem Imaginärteil. Die Lösungen sind konjugiert komplex ($x_\pm \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $x_+ = \overline{x}_-$).

Man nennt b^2-4ac die *Diskriminante.*

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung $x^2-6sx+4=0$ als Gleichung für x und mit s als Parameter. Der Ausdruck b^2-4ac ist gegeben durch $36s^2-16$. In Abhängigkeit des Parammeters s hat nun die Gleichung zwei unterschiedliche, eine oder keine reelle Lösung. Die Bedingung für eine reelle Lösung ist $36s^2-16=0$ was $s=\pm\frac{2}{3}$ ergibt. Für zwei unterschiedliche reelle Lösungen ist die Bedingung $36s^2-16>0$ was $s>\frac{2}{3}$ oder $s<-\frac{2}{3}$ ergibt. Es bleibt der Fall keiner reellen Lösung wenn $s\in(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

3.3.2. *Linearfaktoren.* Es gilt der folgende Satz: Sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $ax^2+bx+c=0$, dann gilt

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Die beiden Faktoren $(x-x_1)$ und $(x-x_2)$ nennt man *Linearfaktoren.* Im Fall wo nur eine Lösung x_0 vorliegt wird diese doppelt verwendet: $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x)=2x^2-16x+30$. Die Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung $2x^2-16x+30=0$ und sind durch die Lösungsformel gegeben als: $x_+=5$, $x_-=3$. Somit ist die Darstellung von $f(x)$ mit Linearfaktoren gegeben durch $f(x)=2(x-5)(x-3)$. Wenn wir die Funktion $g(x)=2x^2+6x+7$ betrachten dann ergeben sich die Nullstellen zu $x_\pm=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}j$ und die Darstellung von $g(x)$ mit Linearfaktoren ist $g(x)=2\Big(x-(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}j)\Big)\Big(x--\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}j\Big)$. Bei der Funktion $h(x)=3x^2-12x+12$ findet man die Nullstelle $x_0=2$. Die Darstellung von $h(x)$ mit Linearfaktoren ist $h(x)=3(x-2)^2$.

3.3.3. *Graph einer quadratischen Funktion, verschiedene Formen der Funktionsgleichung.* Die *Haupt-/Normalform* einer quadratischen Funktion ist

$$y=ax^2+bx+c.$$

Wir betrachten zuerst den Fall $a=1$, $b=c=0$. Der Graph von $y=x^2$ ist die Normalparabel, welche nach oben geöffnet ist und bezüglich der y-Achse spiegelsymmetrisch ist ($f(x)=x^2$ ist eine gerade Funktion). Somit sind die Graphen der Form $y=ax^2$ für $a>0$ nach oben geöffnete und für $a<0$ nach unten geöffnete Normalparabeln welche um den Faktor $|a|$ in Richtung der y-Achse gestreckt ($|a|>1$) oder gestaucht ($|a|<1$) sind. Der Scheitelpunkt S ist der höchste Punkt bei einer nach unten geöffneten Parabel und der tiefste Punkt bei einer nach oben geöffneten Parabel. Für die Parabeln der Form $y=ax^2$ ist der Scheitelpunkt der Koordinatenursprung $(x,y)=(0,0)$.

Durch quadratisches Ergänzen kann die Normalform wie folgt umgeformt werden:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

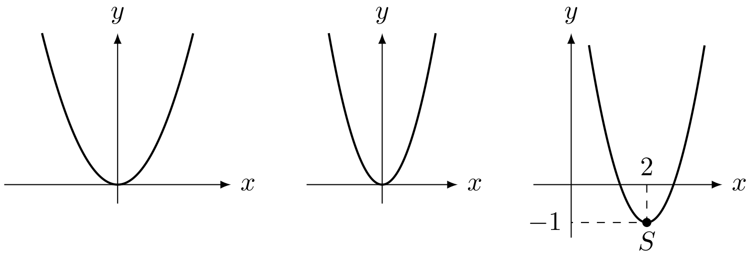
Mit

$$x_0=-\frac{b}{2a},\qquad y_0=-\frac{b^2}{4a}+c$$

ist dies

$$y-y_0=a(x-x_0)^2.$$

Es handelt sich um eine in y-Richtung gestreckte oder gestauchte Normalparabel, welche in x-Richtung um x_0 nach rechts und in y-Richtung um y_0 nach oben verschoben ist. Der Scheitelpunkt liegt somit bei (x_0,y_0). Man nennt diese Form die *Scheitelpunktsform* einer Parabel. Der Graph ist spiegelsymmetrisch bezüglich der Geraden $x = x_0$.



$y = x^2$ $\quad$ $y = 2x^2$ $\quad$ $y + 1 = 2(x-2)^2$

Die *Produktform* einer Parabel ist gegeben durch die Linearfaktoren:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

wobei x_1, x_2 die Nullstellen sind.

3.3.4. *Aufsuchen der Funktionsgleichung aus gegebenen Punkten des Graphen.* Die Funktionsgleichung einer Parabel ist durch Angabe von genügend Punkten des Graphen eindeutig bestimmt. Wir illustrieren an drei Beispielen:

(i) Gegeben seien die Koordinaten von drei Punkten auf der Parabel: $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 3)$. Man findet die Funktionsgleichung wie folgt. Die ersten beiden Punkte sind die Schnittpunkte des Graphen mit der Abszisse und somit sind das die Nullstellen. Es folgt dass die Funktionsgleichung die folgende Form aufweist (Produktform): $y = a(x - 1)(x - 5)$. Einsetzen des dritten Punktes (setzen von $(x, y) = (0, 3)$) und auflösen nach a ergibt $a = \frac{3}{5}$, i.e. $y = \frac{3}{5}(x - 1)(x - 5)$.

(ii) Gegeben seien die Koordinaten von zwei Punkten auf der Parabel: $(2, 3)$, $(3, 4)$ und der zweite Punkt sei der Scheitelpunkt. Man findet in diesem Fall die Funktionsgleichung wie folgt. Da der zweite Punkt dem Scheitelpunkt entspricht macht man den folgenden Ansatz für die Funktionsgleichung (Scheitelpunktsform): $y = a(x - 3)^2 + 4$. Einsetzen des ersten Punktes und nach a lösen ergibt $a = -1$, i.e. die Funktionsgleichung lautet: $y = -(x - 3)^2 + 4$.

(iii) Gegeben seien die Koordinaten von drei Punkten auf der Parabel: $(0, 1)$, $(3, -2)$, $(6, 2)$. Man findet die Funktionsgleichung in diesem Fall wie folgt. Bei diesen drei Punkten sind keine Nullstellen dabei und es ist auch nicht klar ob einer der Punkte dem Scheitelpunkt entspricht. In dieser Situation macht man den allgemeinen Ansatz (Normalform) $y = ax^2 + bx + c$ und setzt die drei Punkte ein. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2 = 36a + 6b + c, \\ 1 = c, \\ -2 = 9a + 3b + c. \end{cases}$$

Auflösen ergibt $a = \frac{7}{18}$, $b = -\frac{13}{6}$, $c = 1$, i.e. die Funktionsgleichung lautet: $y = \frac{7}{18}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$.

3.4. **Polynomfunktionen mit beliebigem Grad $\geq$ 3.** Wie bereits besprochen sind dies Funktionen des Typs

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $n \geq 3$. Die Graphen können ohne lange Rechnung skizziert werden für $|x| \ll 1$ und für $|x| \gg 1$ mit Hilfe der folgenden Approximationen.

3.4.1. *Approximation für kleine x.* Für $|x| \ll 1$ kann man die Eigenschaft $|x|^2 \ll |x|$ verwenden[2] und erhält die Approximation

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &\approx a_1 x + a_0 \qquad\qquad \text{für} \quad |x| \ll 1. \end{aligned}$$

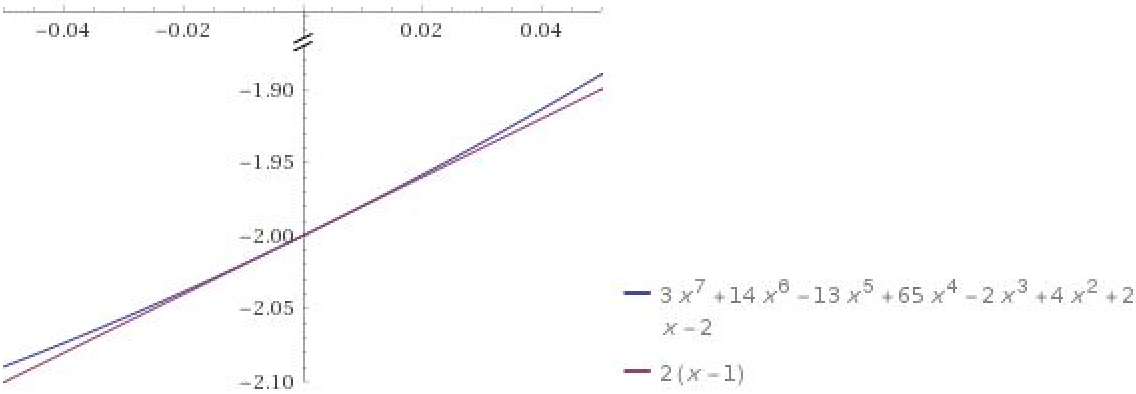
Somit kann der Graph von $y = f(x)$ für $x \ll |1|$ approximiert werden durch die Gerade $y = a_1 x + a_0$. Dies ist die *lineare Approximation* bei $x = 0$. Berücksichtigt man noch einen weiteren Term, so erhält man

$$f(x) \approx a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{für} \quad |x| \ll 1.$$

Dies ist die *quadratische Approximation* bei $x = 0$.

Diese beiden Approximationen sind nur gut für Werte von x genügend nahe bei Null. Die Differentialrechnung (siehe später) wird es uns erlauben solche Approximationen für beliebige Werte von x zu finden.

Als Beispiel zeichnen wir den Graphen der Funktionen $f(x) = 3x^7 + 14x^6 - 13x^5 + 65x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 2$ und $g(x) = 2x - 2$ für $x \in [-0.05, 0.05]$.



3.4.2. *Approximation für grosse $|x|$.* Für $|x| \gg 1$ kann man die Eigenschaft $|x^n| \gg |x^{n-1}|$ verwenden[3] und erhält die Approximation

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &\approx a_n x^n \qquad\qquad \text{für} \quad |x| \gg 1, \end{aligned}$$

oder auch

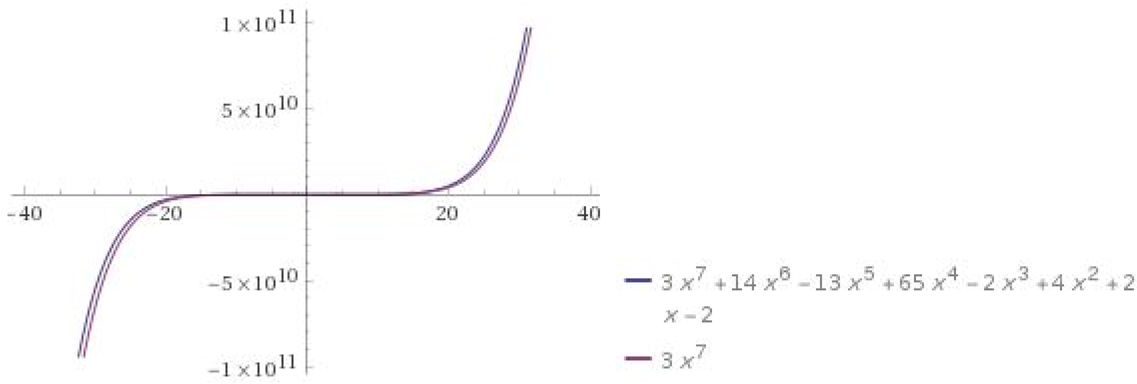
$$\frac{f(x)}{x^n} \approx a_n \quad \text{für} \quad |x| \gg 1.$$

Somit ist die qualitative Form des Graphen für $|x| \gg 1$ gegeben durch $y = a_n x^n$. Als Beispiel zeichnen wir den Graphen der Funktionen $f(x) = 3x^7 + 14x^6 - 13x^5 + 65x^4 -$

[2]Man prüfe diese Eigenschaft durch das Einsetzen von kleinen Zahlen. Zum Beispiel $x = 0.0000001$ ergibt $x^2 = 0.00000000000001$.

[3]Man prüfe diese Eigenschaft durch das Einsetzen von grossen Zahlen. Zum Beispiel ($n = 2$) $x = 1000000$ ergibt $x^2 = 1000000000000$.

$2x^3 + 4x^2 + 2x - 2$ und $g(x) = 3x^7$ für $x \in [-40, 40]$.



3.4.3. *Polynomdivision.* Man kann Polynome durch Linearfaktoren dividieren. Ein Verfahren dazu ist die *Polynomdivision.* Dieses Verfahren entspricht einer Modifikation des Verfahrens zur Division ganzer Zahlen. Wir illustrieren durch ein Beispiel. Sei das Polynom durch $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 2$ gegeben. Wir dividieren durch den Linearfaktor $(x - 3)$.

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - 6x + 2) : (x - 3) = x^2 + 5x + 9 + \dfrac{29}{x-3} \\
-\underline{(x^3 - 3x^2)} \\
\qquad\quad 5x^2 - 6x + 2 \\
\qquad -\underline{(5x^2 - 15x)} \\
\qquad\qquad\qquad 9x + 2 \\
\qquad\qquad\quad -\underline{(9x - 27)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 29 = r
\end{array}$$

Man startet indem man den Term höchster Ordnung des Polynoms durch den Term höchster Ordnung des Linearfaktors[4] dividiert und das Ergebnis auf der rechten Seite notiert. In obigem Beispiel also $x^3/x = x^2$. Dann multipliziert man den erhaltenen Quotienten (also x^2) mit dem Linearfaktor und zieht den dadurch erhaltenen Ausdruck (also $x^2(x-3) = x^3 - 3x^2$) vom Polynom ab. Dieser Prozess wird nun sukzessive widerholt, bis ein Rest r übrigbleibt, dessen Potenz niedriger ist als die des Linearfaktors (also eine Konstante).

Umgeschrieben erhalten wir also

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 6x + 2}{x - 3} = x^2 + 5x + 9 + \frac{29}{x - 3},$$

oder, nach Multiplikation mit dem Linearfaktor $(x - 3)$:

$$x^3 + 2x^2 - 6x + 2 = (x^2 + 5x + 9)(x - 3) + 29.$$

Durch Einsetzen von $x = 3$ in diese Gleichung sehen wir, dass es möglich ist den Rest zu berechnen ohne die Polynomdivision durchzuführen. Wir formulieren diese Beobachtung allgemein.

3.4.4. *Abspalten eines Linearfaktors.* Sei $f(x)$ ein Polynom. Dann gilt für ein beliebiges x_1:

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = f_1(x) + \frac{r}{x - x_1},$$

wobei $f_1(x)$ ein Polynom ist. Umgeschrieben:

$$f(x) = f_1(x)(x - x_1) + r.$$

[4] In der vorliegenden Betrachtung ist dieser immer gleich x, die Polynomdivision kann aber auch bei einer Division durch einen Ausdruck mit höherer Ordnung (zum Beispiel quadratisch) angewandt werden.

Setzen wir nun $x = x_1$ in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$f(x_1) = f_1(x_1)\underbrace{(x_1 - x_1)}_{=0} + r,$$

i.e.

$$r = f(x_1).$$

Ist nun $f(x_1) = 0$, dann folgt $r = 0$ und umgekehrt. Mit anderen Worten, x_1 ist genau dann eine Nullstelle von $f(x)$ falls der Linearfaktor $(x - x_1)$ ein Teiler von $f(x)$ ist. Dieses Resultat ist der Satz zur *Abspaltung von Linearfaktoren.*

Hat nun das Polynom $f_1(x)$ eine Nullstelle bei $x = x_2$, so lässt sich der Linearfaktor $(x-x_2)$ von $f_1(x)$ abspalten, i.e. man kann schreiben $f_1(x) = f_2(x)(x-x_2)$, wobei $f_2(x)$ ein weiteres Polynom ist. Schreibt man nun im Ausdruck für $f(x)$ das Polynom $f_1(x)$ in dieser Weise, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x)(x - x_1) \\ &= f_2(x)(x - x_2)(x - x_1). \end{aligned}$$

Von diesem Ausdruck sehen wir dass x_2 auch eine Nullstelle von $f(x)$ ist. Diesen Prozess kann man nun für weitere Nullstellen sukzessive ausführen.

Eine Antwort auf die Frage nach der Anzahl Nullstellen liefert der *Fundamentalsatz der Algebra*: Die algebraische Gleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

hat im komplexen genau n Lösungen[5]:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

und es gilt die *Linearfaktorzerlegung*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n). \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind die Nullstellen von $f(x)$.

Bemerkungen:

(i) Nullstellen können mehrfach auftreten. Beispiel: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$. Im Fall $n = 2$ entspricht dies der Situation wo $b^2 - 4ac = 0$ in $ax^2 + bx + c = 0$.

(ii) Nullstellen $\in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ treten immer paarweise konjugiert komplex auf. Beispiel: $x^2 + 1 = (x - j)(x + j)$. Im Fall $n = 2$ ist dies aus der Lösungsformel: $x_\pm = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ ersichtlich, falls $b^2 - 4ac < 0$. Dann ist $x_\pm = -b/(2a) \pm j\sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.

(iii) Es existieren 'nur' Formeln für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$. Für die Berechnung der Nullstellen von Polynomen höherer Ordnung müssen numerische Verfahren herangezogen werden.

4. Gebrochenrationale Funktionen

Die *gebrochenrationalen Funktionen* sind Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Typs

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Sie sind somit ein Quotient zweier ganzrationalen Funktionen und wir schreiben oft

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

wobei

$$\begin{aligned} g(x) &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \\ h(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

[5]Dies ist in Analogie zum Resultat dass im komplexen die Anzahl n-te Wurzeln genau n ist.

Im Fall $m < n$ nennt man die Funktion *echt gebrochen rational* und im Fall $m \geq n$ nennt man die Funktion *unecht gebrochen rational.* Beispiele sind (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x+1}$ und (iii) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Hierbei sind die ersten beiden echt und das dritte Beispiel unecht gebrochen.

Bei unecht gebrochen rationalen Funktionen führt die Polynomdivision auf eine Zerlegung in eine Summe aus einer ganzrationalen und einer echt gebrochen rationalen Funktion. Beispiel:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}.$$

4.1. **Nullstellen.** Wir betrachten das Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

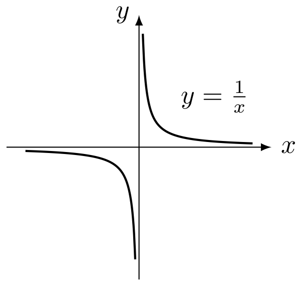
Die *Nullstellen* sind gegeben durch die Gleichung $f(x) = 0$. Der Zähler ist für alle x ungleich Null und somit vereinfacht sich $f(x) = 0$ zu $x^2 - 1 = 0$, i.e. wir haben die zwei Nullstellen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Allgemein gilt: x_0 ist eine *Nullstelle* der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ genau dann, wenn $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$.

4.2. **Definitionslücken.** Wir betrachten das Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$. Division durch Null ist nicht erlaubt, somit ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. Allgemein sind die *Definitionslücken* die Nullstellen des Nenners. Ist n die Ordnung des Nenners so gibt es also höchstens n Nullstellen des Nenners (nach dem Fundamentalsatz der Algebra), somit also höchstens n Definitionslücken.

Falls der Zähler und Nenner gemeinsame Nullstellen besitzen, so zerlegt man den Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzt die gemeinsamen Faktoren. Solche Definitionslücken nennt man *behebbare Definitionslücken.* Die erhaltene Funktion nach dem Kürzen hat nun einen erweiterten Definitionsbereich.

4.3. **Polstellen.** Wir betrachten den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$.

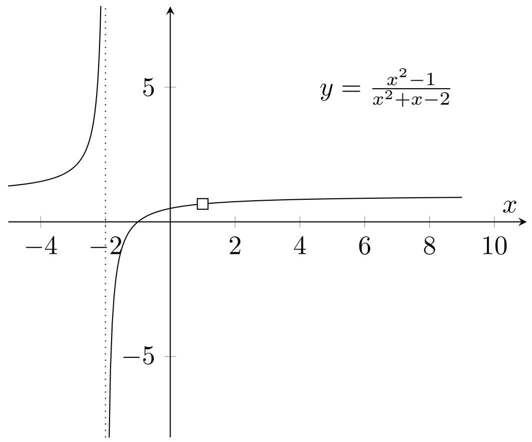


Nun betrachten wir Argumente (x-Werte) in der Nähe von $x = 0$ und studieren die dazugehörigen Funktionswerte $f(x)$. Wir sehen dass für negative x-Werte bei einer Annäherung an $x = 0$ die Funktionswerte $f(x)$ kleiner werden als jede noch so kleine Zahl. Für positive x-Werte bei einer Annäherung an $x = 0$, wachsen die Funktionswerte $f(x)$ über jede Grenze hinaus.

x-Werte, in deren Umgebung die Funktionswerte $f(x)$ über alle Grenzen hinaus fallen oder wachsen heissen *Polstellen.* Im Allgemeinen ist die Menge der Polstellen nicht gleich der Menge der Definitionslücken. Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x-2}.$$

Die Definitionslücken ergeben sich aus den Nullstellen des Nenners zu $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Die Nullstellen des Zählers sind $x = \pm 1$. Die Stelle $x = 1$ ist aber auch eine Nullstelle des Nenners, somit ist $x = 1$ keine Nullstelle der Funktion $f(x)$, da sie nicht im Definitionsbereich liegt. $x = 1$ ist aber auch keine Polstelle, da der Zähler und der Nenner in der Nähe von $x = 1$ beliebig klein werden und der Bruch somit nicht über alle Grenzen hinaus wächst oder fällt (wir werden diese Zusammenhänge bei der Betrachtung von Grenzwerten näher erläutern). Als Nullstelle bleibt also nur $x = -1$. Nach dem kürzen des Linearfaktors ist die gekürzte Funktion $\frac{x+1}{x+2}$ und man sieht dass in der Nähe von $x = -2$ die Funktionswerte beliebig stark wachsen beziehungsweise fallen, $x = -2$ ist somit eine Polstelle. In der folgenden Figur ist der Graph $y = f(x)$ gezeichnet. Die Definitionslücke bei $x = 1$ notieren wir im Graphen mit einem Quadrat.



4.4. **Allgemeines Vorgehen.** Um die Definitionslücken, Nullstellen und Polstellen einer gebrochenrationalen Funktion aufzusuchen geht man wie folgt vor:

(i) Man bestimmt die Nullstellen des Nenners, diese sind die Definitionslücken der Funktion.
(ii) Dann zerlegt man Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzt.
(iii) Die Nullstellen des Zählers der gekürzten Funktion ergeben die Nullstellen der Funktion.
(iv) Die Nullstellen des Nenners der gekürzten Funktion ergeben die Polstellen der Funktion.

4.5. **Asymptoten.** Es sind die Fälle zu unterscheiden in denen eine echt gebrochenrationale Funktion oder eine unecht gebrochenrationale Funktion vorliegt.

Im ersten Fall ist der Zähler von niedrigerer Ordnung als der Nenner und somit ist sein Wachstum für $|x| \to \infty$ weniger schnell als das Wachstum des Nenners. Daraus folgt dass sich eine echt gebrochenrationale Funktion für grosse und kleine x-Werte der x-Achse annähert. In anderen Worten: Falls $f(x) = g(x)/h(x)$ mit $g(x)$ und $h(x)$ Polynomen und $g(x)$ von niedrigerer Ordnung als $h(x)$, dann folgt dass $f(x) \to 0$ wenn $|x| \to \infty$.

Im Fall wo eine unecht gebrochenrationale Funktion vorliegt, kann eine Polynomdivision durchgeführt werden. Man erhält eine Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion (falls der Rest nicht Null ist). Analog zum ersten Fall nähert sich der echt gebrochenrationale Anteil für grosse und kleine x-Werte der x-Achse an. Somit ist der ganzrationale Anteil die Asymptote.

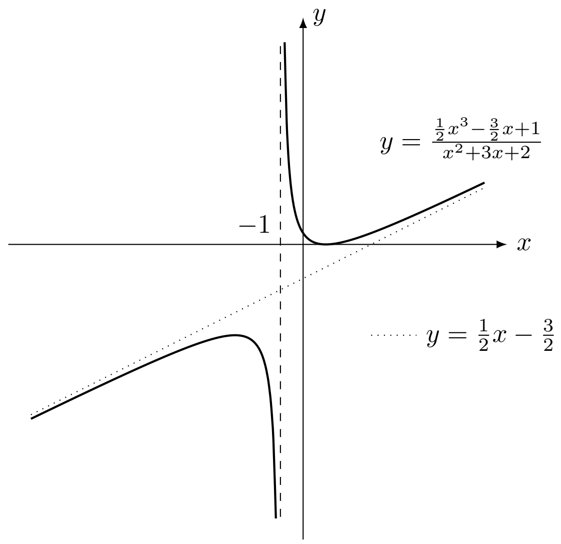
Wir illustrieren an einem Beispiel. Sei

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

Polynomdivision ergibt

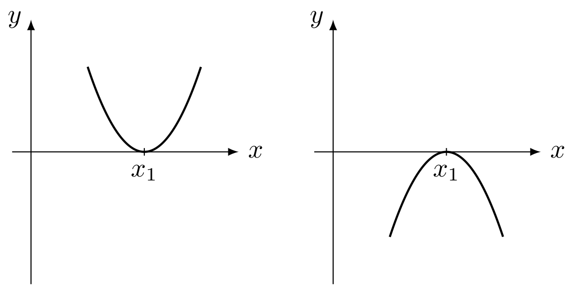
$$\frac{\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{2x + 4}{x^2 + 3x + 2}.$$

Somit sind die Asymptoten von $f(x)$ für grosse und kleine x-Werte gegeben durch die Funktion $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Der Graph der Funktion ist (wobei gestrichelt die Polstelle und gepunktet die Asymptote):

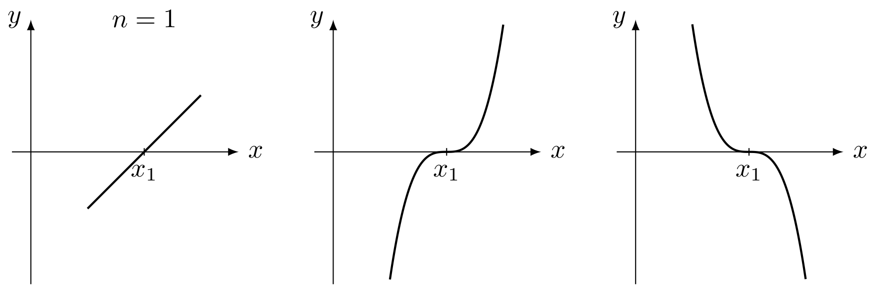


4.6. **Qualitatives Verhalten des Graphen in der Nähe von Null- und Polstellen.** Man betrachtet den Zähler des gekürzten Bruchs. Wir unterscheiden:

(i) Vielfachheit n der Nullstelle x_1 ist gerade, i.e. im Zähler des gekürzten Bruchs steht der Linearfaktor in der Form $\cdots (x - x_1)^n \cdots$ mit n gerade. Dann findet man eine der beiden folgenden Situationen, abhängig vom Vorzeichen der Funktion in der Nähe der Nullstelle:

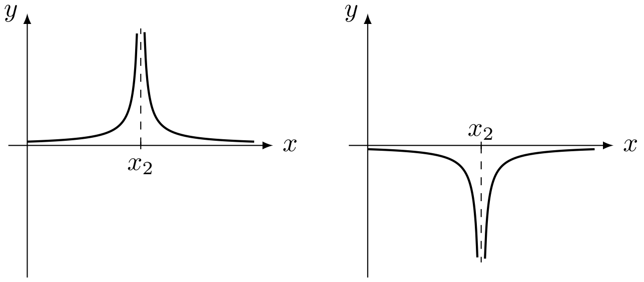


(ii) Vielfachheit n der Nullstelle x_1 ungerade ergibt eine der folgenden drei Situationen:

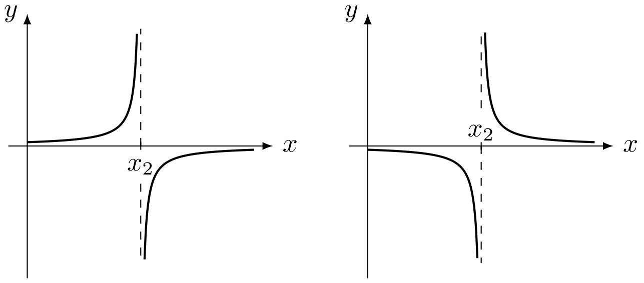


Um das qualitative Verhalten in der Nähe von Polstellen zu betrachten, untersucht man die Vielfachheit der Nullstellen des Nenners des gekürzten Bruchs. Wir unterscheiden:

(i) Die Vielfachheit m der Nullstelle x_2 ist gerade, i.e. im Nenner des gekürzten Bruchs steht der Linearfaktor in der Form $\ldots (x - x_2)^m \cdots$ mit m gerade. Dann findet man eine der folgenden Situationen, abhängig vom Vorzeichen der Funktion in der Nähe dieser Stelle:

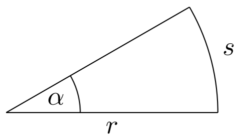


(ii) Vielfachheit m der Nullstelle x_2 ist ungerade:



5. Trigonometrische Funktionen

5.1. **Winkel im Bogenmass.** Im Alltag wird oft das Gradmass verwendet um Winkel zu messen, ein rechter Winkel enstpricht hierbei 90° und eine volle Umdrehung 360°. Für technisch-naturwissenschaftliche Rechnungen ist das sogenannte *Bogenmass* besser geeignet und gilt in diesen Gebieten als Standard. Der Winkel im Bogenmass wird an Hand der folgenden Grafik erklärt:



Hierbei ist s die Länge des Bogenstücks (Teil eines Kreises), r der Radius und α der Winkel. Das Bogenmass α wird nun so gewählt dass die Beziehung $s = r\alpha$ richtig ist, i.e.

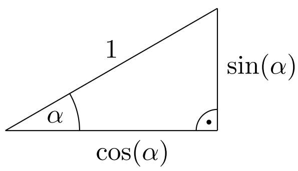
$$\alpha = \frac{s}{r}\,.$$

Das Bogenmass ist ein Verhältnis von Längen und besitzt somit keine Einheit. Für einen Vollkreis gilt $s = 2\pi r$ und somit $\alpha = 2\pi$, i.e. $360° = 2\pi$. Man erhält die Umrechnungsformel

$$\alpha = \alpha^\circ \frac{\pi}{180^\circ}, \qquad \alpha^\circ = \alpha \frac{180^\circ}{\pi}.$$

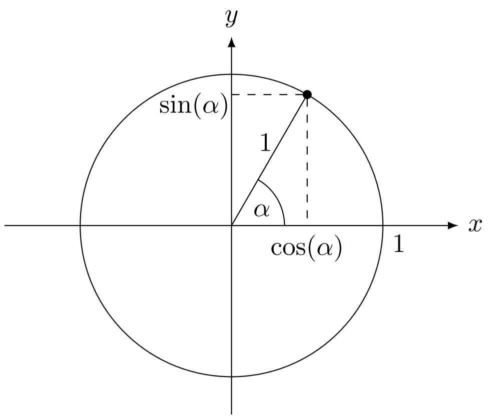
Es ist zu beachten dass Winkelangaben im Gradmass immer mit dem Grad-Zeichen geschrieben werden. Hingegen entsprechen Winkelangaben durch reine Zahlen immer einem Winkel im Bogenmass. Ein Winkel von 90 und ein Winkel von 90° entsprechen somit nicht dem selben Winkel.

5.2. **Definition der trigonometrischen Funktionen.** Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus sind bekannt durch deren Interpretation an einem rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenusenlänge eins:



Diese Interpretation hat den wesentlichen Nachteil, dass sie nur für Winkel zwischen 0 und $\pi/2$ wirklich aussagekräftig ist. Wir werden aber trigonometrische Funktionen für beliebige Argumente verwenden, somit benötigen wir eine zusätzliche Veranschaulichung.

Diese ist gegeben durch die Interpretation als x- beziehungsweise y-Komponente eines Punktes auf dem *Einheitskreis*:



Diese Interpretation am Einheitskreis fassen wir als Definition der Trigonometrischen Funktionen *Sinus* und *Kosinus* auf. Hinweis: Diese Definition macht auch für negative Winkel α Sinn: Vom Punkt $(1,0)$ aus wird der entsprechende Bogen im Uhrzeigersinn abgetragen.

Aus der Figur sind die folgenden Vorzeichen in den vier Quadranten ersichtlich.

Quadrant	Winkel α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
I	$0 < \alpha < \pi/2$	$+$	$+$
II	$\pi/2 < \alpha < \pi$	$+$	$-$
III	$\pi < \alpha < 3\pi/2$	$-$	$-$
IV	$3\pi/2 < \alpha < 2\pi$	$-$	$+$

Ebenso verifiziert man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\pi) &= -\sin(\alpha), & \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha), & \sin(\alpha+2\pi) &= \sin(\alpha), \\ \cos(\alpha+\pi) &= -\cos(\alpha), & \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha), & \cos(\alpha+2\pi) &= \cos(\alpha). \end{aligned}$$

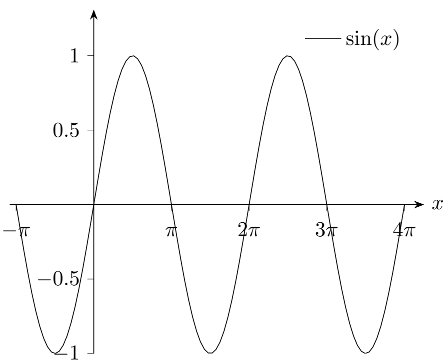
D.h. $\sin(\alpha)$ ist eine ungerade, 2π-periodische Funktion und $\cos(\alpha)$ ist eine gerade, 2π-periodische Funktion. Der Satz von Pythagoras ergibt

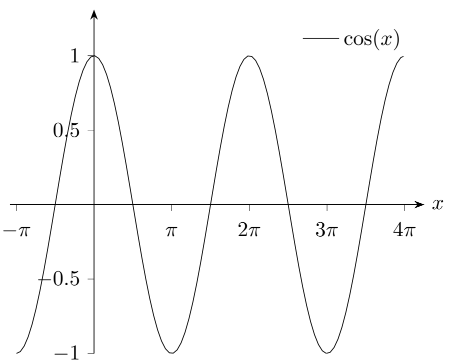
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

5.2.1. *Funktionswerte wichtiger Winkel.* Die folgenden Tabelle enthält Werte der Sinus- und Kosinusfunktion für spezielle (wichtige) Winkel.

$\alpha\,[°]$	α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
$0°$	0	0	1
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0

5.2.2. *Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion.* Das Bild der Sinus- und Kosinusfunktion ist das Intervall $[-1,1]$, der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.





5.3. **Eigenschaften der Kreisunktionen.** Durch genaues Studieren des Einheitskreises kann man noch weitere Eigenschaften am Einheitskreis ablesen, wie zum Beispiel:

$$\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha), \qquad \text{und} \qquad \cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha).$$

Eine lange Liste von solchen Eigenschaften ist in jeder guten Formelsammlung oder im Internet zu finden. Eine wichtige Klasse von Eigenschaften sind die sogenannten Additionstheoreme.

5.3.1. *Additionstheoreme.* Die beiden wichtigsten Additionstheoreme sind:

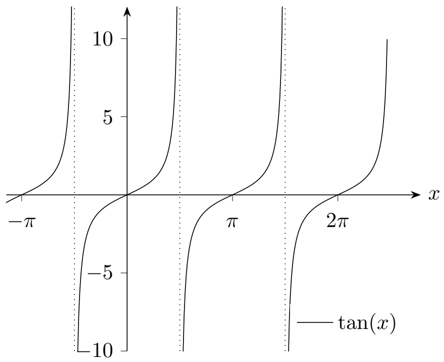
$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

Wir gehen an dieser Stelle nicht auf die Herleitung ein.

5.4. **Die Tangensfunktion.** Die *Tangensfunktion* ist definiert durch die Gleichung

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Dadurch sind der Definitions- und Bildbereich gegeben. Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, ausser für die Nullstellen von $\cos(x)$, d.h. für $x \neq \pi/2 + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für diese speziellen x-Werte ergibt sich jeweils eine Polstelle mit wechselndem Vorzeichen.

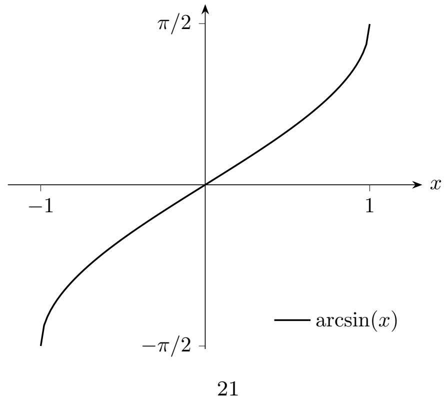


Die Eigenschaften bezüglich Periode, symmetrie u.s.w. können aus den entsprechenden Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion abgeleitet werden.

5.5. **Inverse trigonometrische Funktionen.**

5.5.1. *Arkussinus.* Das Bild der Sinusfunktion ist $[-1, 1]$ und somit ist die Funktion $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$ surjektiv. Jedoch ist diese Funktion nicht injektiv. Beispielsweise gilt $\sin(\pi/2) = \sin(5\pi/2)$. Wenn wir jedoch die Einschränkung dieser Funktion auf den Definitionsbereich $[-\pi/2, \pi/2]$ betrachten, so sehen wir dass die Funktion in diesem Bereich streng monoton wachsend und somit injektiv ist. Die Funktion $[-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ ist also bijektiv und somit invertierbar. Wir definieren die *Arkussinusfunktion* als inverse dieser auf das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ eingeschränkten Sinusfunktion:

$$y = \arcsin(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = x \quad \text{und} \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2.$$

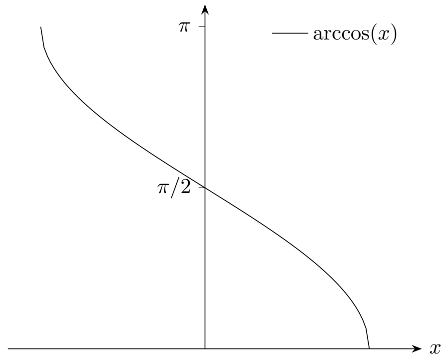


Einige spezielle Werte sind

$$\arcsin(0) = 0, \qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}, \qquad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}.$$

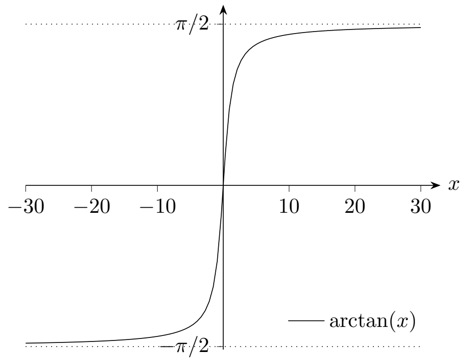
5.5.2. *Arkuskosinusfunktion.* Für die Inverse der Kosinusfunktion wird der Definitionsbereich auf das Intervall $[0, \pi]$ eingeschränkt. Die erhaltenen Funktion ist die *Arkuskosinusfunktion.*

$$y = \arccos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq \pi.$$



5.5.3. *Arkustangensfunktion.* Wir schränken den Definitionsbereich auf das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ ein. Die Tangensfunktion auf dieses Intervall eingeschränkt ist invertierbar, die erhaltene Funktion heisst *Arkustangensfunktion.*

$$y = \arctan(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(y) = x \quad \text{und} \quad -\pi/2 < y < \pi/2.$$



5.5.4. *Einige Eigenschaften zusammengefasst.*

Funktion	Definitionsbereich	Bild	Symmetrie	Monotonie
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	ungerade	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	gerade	
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	ungerade	
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	ungerade	wachsend
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$		fallend
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$	ungerade	wachsend

5.5.5. *Notation.* Für die inversen trigonometrischen Funktionen wird auch die Notation

$$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x), \qquad \arccos(x) = \cos^{-1}(x), \qquad \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$$

verwendet. Es ist zu beachten dass dies zu einer Inkonsistenz führt. Wir haben zum Beispiel

$$\sin^2(x) = (\sin(x))^2, \qquad \sin^5(x) = (\sin(x))^5,$$

aber es gilt

$$\sin^{-1}(x) \neq \frac{1}{\sin(x)}, \qquad \sin^{-1}(x) = \arcsin(x).$$

Also gilt

$$\sin^k(x) = (\sin(x))^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}.$$

5.6. **Trigonometrische Gleichungen.** Die inversen trigonometrischen Funktionen sind notwendig um Gleichungen, die trigonometrische Funktionen enthalten, zu lösen. Leider genügen sie alleine nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Die beiden Probleme:

(i) Man berechne $x = \arcsin(1/2)$,
(ii) Man finde alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) = 1/2$,

haben verschiedene Lösungen, nämlich

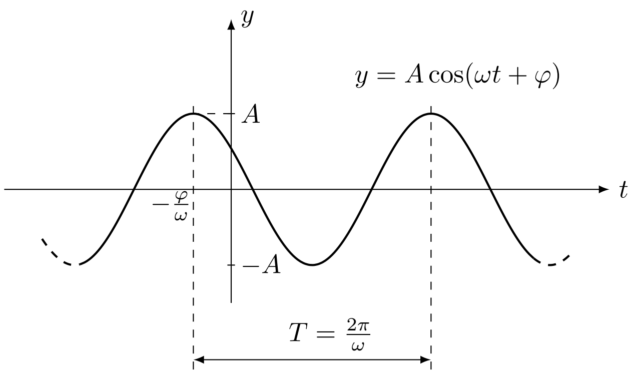
(i) $x = \pi/6$,
(ii) $x = \pi/6 + k2\pi$ und $x = \pi - \pi/6 + k2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Diese beiden Probleme zeigen den typischen Effekt beim Lösen einer trigonometrischen Gleichung: der zu behandelnde Definitionsbereich muss unbedingt berücksichtigt werden und es gibt meistens mehrere Lösungen.

5.7. **Harmonische Schwingungen.** Wir betrachten eine Masse aufgehängt durch eine Feder an der Decke. Lenken wir die Masse vertikal aus der Ruhelage aus und überlassen das System sich selbst, so führt die Masse vertikale Bewegungen in der Form von Schwingungen aus. Unter Annahme der physikalischen Grundgesetze der Dynamik kann man zeigen dass die vertikale Auslenkung z in Abhängigkeit der Zeit t gegeben ist durch $z(t) = A\cos(\omega t)$. A heisst *Amplitude* und ω *Kreisfrequenz*. Allgemein wird der zeitliche Verlauf einer Grösse $f(t)$, welche durch

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

beschrieben werden kann eine *harmonische Schwingung* genannt. φ heisst *Phase* oder *Phasenwinkel*. Üblicherweise gilt $A, \omega > 0$.



5.7.1. *Physikalische Bedeutung.* Wir betrachten die Grundform einer harmonischen Schwingung und schreiben das Argument der trigonometrischen Funktion folgendermassen um.

$$\begin{aligned} f(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ &= A\cos(\omega t + 2\pi + \varphi) \\ &= A\cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) \\ &= f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Somit ist die Periodendauer von $f(t)$ gegeben durch $2\pi/\omega$, i.e. $T = 2\pi/\omega$. Die *Frequenz* f ist die Anzahl Schwingungen pro Zeiteinheit und gegeben durch $f = 1/T = \omega/(2\pi)$. Die Amplitude A vergrössert das Bild der Funktion. I.e. $\mathrm{Im}(\cos) = [-1, 1]$ aber $\mathrm{Im}(A\cos) = [-A, A]$. Somit sind $\pm A$ die maximalen und minimalen Werte von f. Die Phase φ führt in folgender Weise zu einer Verschiebung im Zeitbereich.

$$\begin{aligned} f(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ &= A\cos\left(\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right). \end{aligned}$$

Der Graph von $A\cos(\omega t+\varphi)$ ist also gegenüber dem Graph von $A\cos(\omega t)$ um den Wert φ/ω nach links verschoben (falls $\varphi > 0$, ansonsten ergibt sich eine Verschiebung nach rechts).

5.7.2. *Alternative Darstellung.* Unter Verwendung des Additionstheorems haben wir

$$\cos(\omega t+\varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi),$$

i.e. wir haben die folgende alternative Darstellung einer harmonischen Schwingung:

$$A\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t),$$

wobei

$$a = A\cos(\omega t), \qquad b = -A\sin(\omega t).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$a^2+b^2 = A^2, \qquad -\frac{b}{a} = \tan(\varphi).$$

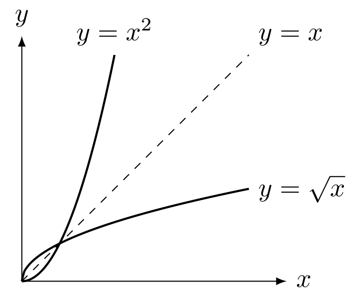
(die erste Gleichung davon aus Quadrieren und Addieren der obigen zwei Gleichungen und die zweite Gleichung ergibt sich aus der Division der beiden obigen Gleichungen).

6. Wurzelfunktionen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto y = f(x) = x^n \end{aligned}$$

ist bijektiv. Es existiert somit die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto y = f^{-1}(x)$, wobei $f(x) = x^n = y$ ist. Diese Funktion nennen wir die *n-te Wurzelfunktion* und bezeichnen sie mit $\sqrt[n]{x}$. Der Graph von $y = x^n$ und $y = \sqrt[n]{x}$ (Spiegelung an Geraden $\{y = x\}$):



7. Summen und Fakultät

7.1. **Summenschreibweise.** Seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Die *Summe* dieser Zahlen kann (in kompakter Notation) geschrieben werden als

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Allgemein gilt für $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Beispiele:

(i) Sei $a_k = \frac{1}{k}$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

(ii) Sei $a_k = \frac{1}{2^k}$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots.$$

(iii) Sei S die Summe der Elemente der Menge $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Dann ist

$$S = \sum_{k=0}^{4} (2k+1) = \underbrace{(2 \cdot 0 + 1)}_{=1} + \underbrace{(2 \cdot 1 + 1)}_{=3} + \underbrace{(2 \cdot 2 + 1)}_{=5} + \ldots + \underbrace{(2 \cdot 4 + 1)}_{=9}.$$

(iv) Umbenennung Summationsindex, Verschiebung Summationsindex (*Indextransformation*).

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

(v) Polynom n-ten Grades.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

7.2. **Fakultät.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Man definiert n *Fakultät*, geschrieben $n!$ durch

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n & n \geq 1. \end{cases}$$

Beispielsweise ist $3! = 6$ und $10! = 3628000$. Man definiert den *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$, gelesen n tief k als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beispielsweise ist

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Eine einfache und übersichtliche Darstellung der Binomialkoeffizienten bietet das *Pascalsche Dreieck*. Dort werden die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ aufgetragen, wobei n der Zeile entspricht (begonnen mit $n = 0$) und k der Diagonale (begonnen mit $k = 0$).

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & \ldots & & & & & \end{array}$$

Mit den berechneten Werten:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & \ldots & & & & & \end{array}$$

Man sieht dass sich ein Wert als Summe der beiden darüberstehenden Werte berechnen lässt (siehe Übung).

7.3. **Binomialentwicklung.** Es gilt

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3.
\end{aligned}
$$

Allgemein kann man zeigen dass die *Binomialentwicklung* gilt:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.
\end{aligned}
$$

8. Exponential- und Logarithmusfunktion

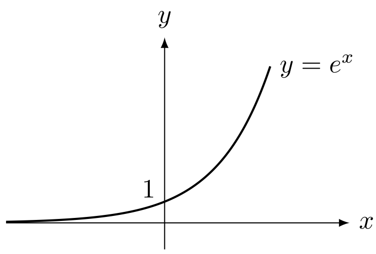
8.1. **Natürliche Exponentialfunktion.** Die *Eulersche Zahl* e ist definiert als

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = 2.71828\ldots$$

Die (natürliche) *Exponentialfunktion*, auch genannt exp ist definiert als

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

Im folgenden notieren wir die Funktion mit e^x. Der Graph von $y = e^x$ ist:



Die Funktion geht für $x \to -\infty$ nach $y = 0$, i.e. die x-Achse ist die Asymptote von e^x für negative x.

Die Funktion $y = e^x$ besitzt als Definitionsbereich die gesamten reellen Zahlen, das Bild ist $(0, \infty)$. Die Funktion ist streng monoton wachsend und somit ist

$$
\begin{aligned}
\exp : \mathbb{R} &\to (0, \infty) \\
x &\mapsto y = e^x
\end{aligned}
$$

bijektiv.

Die natürliche Exponentialfunktion besitzt die fundamentale Eigenschaft

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

Herleitung:

$$
\begin{aligned}
e^x e^y &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \dots\right) \\
&= 1 + (x+y) + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + \dots \\
&= 1 + (x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{6}(x+y)^3 + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} \\
&= e^{x+y}.
\end{aligned}
$$

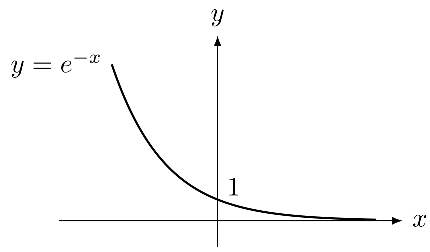
(Diese fundamentale Eigenschaft, angewendet auf den Fall $x, y \in \mathbb{N}$ rechtfertigt die Notation $\exp(x) = e^x$). Aus der fundamentalen Eigenschaft folgt

$$1 = e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x}$$

und somit

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}\,.$$

Die Funktion e^{-x} besitzt den Graphen:

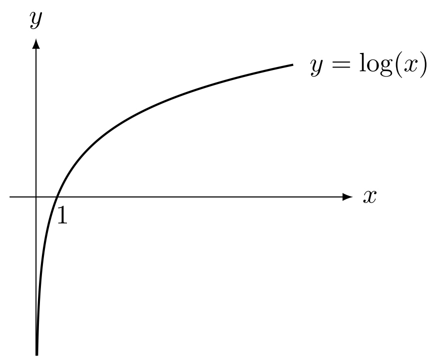


Diese Funktion ist streng monoton fallend und besitzt für positive x die Asymptote $y = 0$.

8.2. **Natürlicher Logarithmus.** Die Funktion $y = e^x$ ist bijektiv und besitzt somit eine Umkehrfunktion. Wir definieren den *natürlichen Logarithmus*, geschrieben log, als diese Funktion:

$$
\begin{aligned}
\log : (0, \infty) &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto y = \log(x) = \exp^{-1}(x).
\end{aligned}
$$

Der Graph dieser Funktion ist (Spiegelung des Graphen $y = e^x$ an der Geraden $y = x$):



Bemerkung: In der Literatur wird für den natürlichen Logarithmus oft $\ln(x)$ an Stelle von $\log(x)$ verwendet.

Der natürliche Logarithmus besitzt die Eigenschaften

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y),$$
$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$$

Herleitung der ersten Eigenschaft (die Herleitung der zweiten Eigenschaft ist analog): Sei

$$u = \log(x), \qquad v = \log(y).$$

Dann folgt

$$x = e^u, \qquad y = e^v.$$

Somit haben wir

$$xy = e^u e^v = e^{u+v},$$

wobei wir die fundamentale Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion verwendet haben. Der Logarithmus dieser Gleichung liefert die erste obige Eigenschaft.

8.3. **Exponentialfunktion zu beliebiger Basis $a > 0$.** Sei $a > 0$. Wir definieren die *Exponentialfunktion zur Basis* a als

$$a^x = e^{x\log(a)}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= e^{(x+y)\log(a)} \\ &= e^{x\log(a)+y\log(a)} \\ &= e^{x\log(a)}e^{y\log(a)} \\ &= a^x a^y, \end{aligned}$$

i.e. die fundamentale Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion gilt für eine beliebige Basis $a > 0$.

Mit $x > 0$ in der Rolle von a haben wir die Gleichung

$$x^y = e^{y\log(x)}.$$

Der Logarithmus dieser Gleichung ergibt

$$\log(x^y) = y\log(x),$$

eine weitere wichtige Eigenschaft des Logarithmus.

8.3.1. *Potenzgesetze.* Es gelten die Potenzgesetze:

$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^x b^x = (ab)^x, \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Wir leiten das erste dieser Gesetze her:

$$(a^x)^y = \left(e^{x\log(a)}\right)^y = e^{y\log\left(e^{x\log(a)}\right)} = e^{yx\log(a)} = a^{yx} = a^{xy}.$$

Hier verwenden wir für die ersten beiden Gleichungen die Definition der Exponentialfunktion. Für die dritte Gleichung verwenden wir $\log(e^{\cdots}) = \ldots$ und für die vierte Gleichung verwenden wir wieder die Definition der Exponentialfunktion.

8.3.2. *Graphen der Exponentialfunktionen.* Für $a > 1$ haben wir

$$a^x = e^{x\overbrace{\log(a)}^{>0}}.$$

Das heisst der Graph sieht aus wie eine Stauchung oder Streckung des Graphen $y = e^x$ in x-Richtung.

Für $0 < a < 1$ haben wir

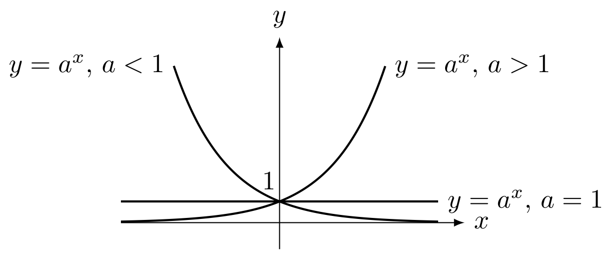
$$a^x = e^{x\overbrace{\log(a)}^{<0}}.$$

Das heisst der Graph sieht aus wie eine Stauchung oder Streckung des Graphen $y = e^{-x}$ in x-Richtung.

Für $a = 1$ haben wir

$$a^x = e^{x \log(a)} = e^0 = 1.$$

Das heisst der Graph von a^x für $a = 1$ ist eine horizontale Gerade durch den Punkt $(0, 1)$.



8.4. **Logarithmus zur Basis $a \neq 1$, $a > 0$.** Wir definieren die *Logarithmusfunktion zur Basis* $a \neq 1$, $a > 0$ als die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion a^x, i.e. $y = \log_a(x)$ genau dann wenn $x = a^y$. Wir verwenden einen Index um die Basis anzugeben. Wird kein Index geschrieben, so handelt es sich um den natürlichen Logarithmus. I.e. $\log_e(x) = \log(x)$.

8.4.1. *Logarithmengesetze.* Wie für der natürlichen Logarithums gelten auch für den Logarithmus zur Basis a die folgenden Gesetze

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y), \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y), \\
\log_a\left(x^y\right) &= y \log_a(x).
\end{aligned}$$

8.4.2. *Basiswechsel.* Ein Logarithmus zu einer beliebigen Basis kann folgendermassen durch den natürlichen Logarithmus ausgedrückt werden:

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

Herleitung: Sei $u = \log_a(x)$. Dann haben wir

$$x = a^u.$$

Natürlicher Logarithmus dieser Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
\log(x) &= \log(a^u) \\
&= u \log(a) \\
&= \log_a(x) \log(a).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die obige Gleichung für den Basiswechsel. Bemerkung: Der Logarithmus zur Basis a kann analog auch in einer anderen Basis als der natürlichen ausgedrückt werden.

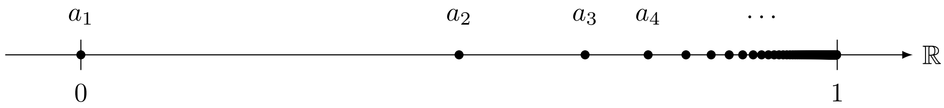
9. Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

9.1. **Reelle Zahlenfolgen.** Wir beginnen mit einem Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Ausdruck $a_n = \frac{n-1}{n}$. Für $n = 1$ ist dieser Ausdruck 0, i.e. $a_1 = 0$. Für $n = 2$ ist $a_2 = \frac{1}{2}$. Weiter ergibt sich $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}$ und so weiter. Wir bekommen auf diese Weise eine *Zahlenfolge* (kurz: *Folge*)

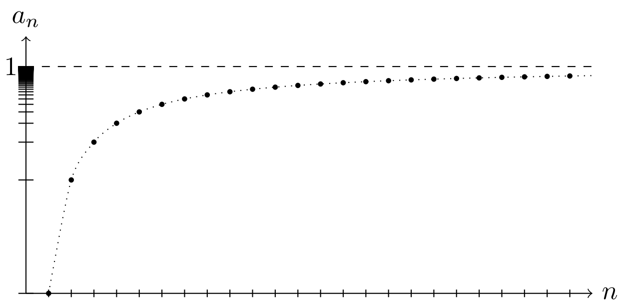
$$(a_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \dots$$

Die Klammern auf der linken Seite sollen andeuten dass wir die gesamte Folge meinen, im Gegensatz zu a_n, welches nur ein einzelnes Element der Folge bezeichnet. Wir betrachten Zahlenfolgen für welche $a_n \in \mathbb{R}$ gilt, dies sind *reelle Zahlenfolgen*.

Die Elemente a_n der Zahlenfolge lassen sich auf einem Zahlenstrahl grafisch darstellen:



Eine weitere Möglichkeit eine Folge grafisch darzustellen besteht darin, die Werte von n als x-Koordinaten und die Werte von a_n als y-Koordinaten von Punkten aufzufassen und diese Punkte in der x-y-Ebene darzustellen.



Diese grafische Darstellung legt es nahe eine reelle Zahlenfolge wie folgt zu definieren: Eine *reelle Zahlenfolge* ist eine Funktion:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) = a_n. \end{aligned}$$

Wenn wir anstelle von $n \in \mathbb{N}$ als Argument der Funktion f reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$ verwenden, bekommen wir die *einhüllende Kurve* der Folge (die gepunktete Linie in der obigen Grafik).

Man kann die *Vorschrift zur Bildung einer Folge* explizit oder implizit angeben.

(i) Explizit: a_n in Abhängigkeit von n, zum Beispiel: $a_n = \frac{n}{1+n^2}$.

(ii) Implizit: a_{n+1} in Abhängigkeit von a_n (und möglicherweise a_{n-1}, a_{n-2},...). Bei der impliziten Angabe wird auch ein Startwert, i.e. a_1 benötigt. Zum Beispiel: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

9.2. **Grenzwert einer Folge.** Wir beginnen wieder mit dem Beispiel der Folge $a_n = \frac{n-1}{n}$. Wir betrachten die Elemente geometrisch auf der Zahlengeraden (siehe oben) und wir betrachten die Elemente auch numerisch in einer Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	0	0.5	0.6667	0.7500	0.800	0.8333	0.8571	0.8750	0.8889	...

Wir sehen nun geometrisch und numerisch dass die Werte für wachsendes n immer näher zum Wert 1 kommen. Wir sehen auch dass für noch so grosses n der Wert a_n kleiner ist als 1. Jedoch nimmt die Differenz zwischen 1 und a_n ab. Man sieht dass die Folge a_n gegen den Wert 1 strebt. Diesen Wert 1 nennt man den *Grenzwert* der Folge und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Man sagt dann "die Folge konvergiert gegen 1 für n gegen unendlich".

Im Beispiel $a_n = \frac{n-1}{n}$ haben wir die Konvergenz der Folge gegen 1 aus der numerischen und geometrischen Betrachtung der Elemente der Folge festgestellt. Für eine allgemeine Folge benötigen wir eine allgemeine Definition von Konvergenz. Eine mathematisch präzise Definition von Konvergenz ist aber abstrakt und umständlich in der Anwendung. Eine mögliche Definition von *Konvergenz* die zu einer besseren Vorstellung führt ist die folgende:

$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ bedeutet: Egal wie klein wir uns einen Abstand von g wählen, es gibt immer ein genügend grosses n so dass alle Elemente der Folge ab diesem n einen Abstand kleiner als der gewählte von g haben.

Die mathematisch rigorose Definition von Konvergenz ist die obige Definition, wobei aber der Begriff des Abstandes mit dem Betrag erfasst wird. Die Grösse der kleinen Abstände zu dem Grenzwert g werden mit der Variable ε erfasst. Die Definition lautet:

Eine Folge a_n konvergiert gegen g genau dann wenn: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für $n > n_0$ gilt: $|a_n - g| < \varepsilon$.

Wir beweisen die Konvergenz der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den Wert 0: Sei $\varepsilon > 0$. Dann wählen wir $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ folgt nun $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Besitzt eine Folge einen Grenzwert g so heisst sie *konvergent*, ansonsten *divergent*.

Wir betrachten nun Beispiele von Folgen und diskutieren ihre Grenzwerte (falls sie existieren).

(i) Die Elemente der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ streben gegen Null, i.e. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(ii) Die Folge $(a_n) = -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ besitzt keinen Grenzwert, die Folge ist somit divergent. Allgemein kann eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzen. Bemerkung: Die Elemente dieser Folge können explizit als $a_n = (-1)^n$ geschrieben werden.

(iii) $(a_n) = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ Die Elemente der Folge können explizit als $a_n = n^2$ geschrieben werden. Man sieht dass die Folge über alle Schranken hinaus wächst (man sagt auch "gegen Unendlich strebt"). Die Folge besitzt keinen Grenzwert und ist somit divergent. Man schreibt aber

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

und sagt die Folge besitzt einen *uneigentlichen Grenzwert*.

(iv) $a_n = \frac{1+n}{2+3n}$. Man sieht dass der Zähler und der Nenner über alle Schranken wachsen. In dieser Situation findet man den Grenzwert durch Erweitern:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)\frac{1}{n}}{(2+3n)\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{2}{n}+3} = \frac{1}{3},$$

wobei wir im letzten Schritt verwenden dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Im letzten Beispiel wurde das folgende Resultat verwendet: Seien (a_n), (b_n) zwei Folgen für welche ein Grenzwert existiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) &= \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right), \\
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung nur gilt falls $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

9.3. **Grenzwert einer Funktion.**

9.3.1. *Beispiel* $f(x) = x^2$. Wir betrachten die Situation zuerst am Beispiel der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$. Wir untersuchen das Verhalten dieser Funktion $f(x)$ bei einer Annäherung ihres Arguments x an den Wert $x_0 = 2$. Wir wählen dazu eine Folge von x-Werten, welche kleiner als x_0 sind und die gegen den Wert $x_0 = 2$ konvergieren, i.e. wir wählen (x_n) mit $x_n < 2$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Für jedes Element x_n dieser Folge berechnen wir nun den dazugehörigen Funktionswert $f(x_n) = x_n^2$. Dies ergibt wieder eine Folge, eine Folge von Funktionswerten: $(f(x_n))$. Wir stellen die beiden Folgen in einer Tabelle dar:

x_n	1.9	1.99	1.999	1.9999	...
$f(x_n) = x_n^2$	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	...

Wenn wir nun die Folge von Funktionswerten $(f(x_n))$ betrachten, so sehen wir dass diese Folge gegen den Wert 4 strebt, i.e. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = 4.$$

Diese Erkenntnis hängt nicht von der Wahl der Folge (x_n) ab. Um dies zu illustrieren wählen wir eine andere Folge (x_n) von x-Werten die auch kleiner als 2 sind und gegen

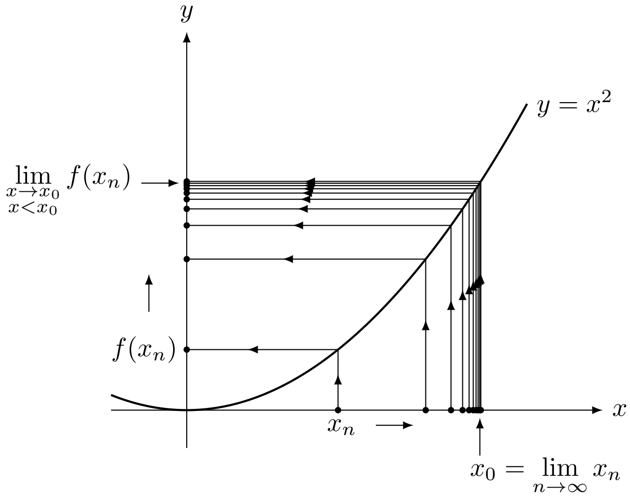
$x_0 = 2$ streben. Wieder stellen wir die Folgen (x_n) und $(f(x_n))$ in einer Tabelle dar:

x_n	1.95	1.995	1.9995	1.99995	...
$f(x_n) = x_n^2$	3.8025	3.980025	3.99800025	3.9998000025	...

Wieder sehen wir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = 4$. Der Grenzwert von $(f(x_n))$ hängt nicht von der gewählten Folge (x_n) ab, vorausgesetzt es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Der hier ermittelte Grenzwert von $(f(x_n))$ heisst *linksseitiger Grenzwert der Funktion* $f(x)$, da wir Folgen (x_n) gewählt haben die sich von links (auf der Zahlengeraden) an den Wert x_0 annähern. Wir schreiben symbolisch

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht ein Grenzwert einer Folge von Zahlen. Auf der linken Seite der Gleichung steht der linksseitige Grenzwert einer Funktion.



Nun führen wir den obigen Prozess nochmals aus, aber wir nähern uns dieses mal von rechts, i.e. wir wählen eine Folge (x_n) so dass $x_n > 2$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Wir stellen wieder in einer Tabelle dar:

x_n	2.1	2.01	2.001	2.0001	...
$f(x_n) = x_n^2$	4.41	4.0401	4.004001	4.00040001	...

Wieder sehen wir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = 4$ und wieder hängt dieser Grenzwert nicht von der gewählten Folge ab. Da es sich um eine Annäherung von rechts handelt schreiben wir dies symbolisch als

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Dies ist der *rechtsseitige Grenzwert der Funktion*. Wir sehen dass der links- und rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen. Diesen Grenzwert nennt man den *Grenzwert der Funktion* und schreibt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 4.$$

9.3.2. *Allgemeine Definition.* Sei die Funktion $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 definiert. Sei x_n eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und es gelte $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Dann heisst g der Grenzwert der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und man schreibt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

Bemerkungen:

(i) Die Funktion $f(x)$ muss an der Stelle $x = x_0$ nicht definiert sein damit ein Grenzwert existieren kann.

(ii) Im Ausdruck $\lim_{x\to x_0} f(x)$ kommt x dem Wert x_0 beliebig nahe aber es gilt immer $x \neq x_0$. Somit dürfen in diesem Ausdruck Rechenoperationen durchgeführt werden die an der Stelle $x = x_0$ nicht definiert sind.

(iii) Eine Funktion kann auch nur einen links- oder rechtsseitigen Grenzwert besitzen. Nur wenn beide dieser Grenzwerte für die Funktion existieren und gleich sind, besitzt die Funktion einen Grenzwert. Für den links- und rechtsseitigen Grenzwert benutzen wir die Notation:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x).$$

Beispiele:

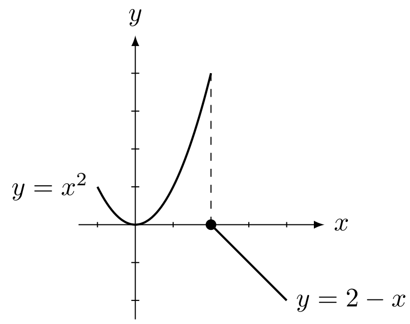
(i) $\lim_{x\to 3} e^x = e^3$. Die Funktion ist an der Stelle $x = 3$ definiert und der links- und rechtsseitige Grenzwert stimmen überein.

(ii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2$. Der Linearfaktor $(x-2)$ kann gekürzt werden, da wir die Grenzwertbildung betrachten und nicht die Funktion selbst. Somit ist $x \neq 2$ und es wird beim Kürzen nicht durch 0 dividiert, was einen unbestimmten Ausdruck liefern würde.

(iii) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 2 \\ 2-x & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Der Funktionswert bei $x = 2$ ist $f(2) = 0$, dies verdeutlichen wir mit einem Punkt in der Grafik.



Der linksseitige Grenzwert ist:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

und der rechtsseitige Grenzwert ist

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2-x) = 0.$$

Somit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 2} f(x)$ nicht.

9.3.3. *Grenzwerte für $x \to \pm\infty$.* Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Wir betrachten eine Folge (x_n) wobei die Folge über alle Schranken hinaus wachsen soll, i.e. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Nun betrachten wir die dazugehörige Folge von Funktionswerten $f(x_n) = \frac{1}{x_n}$. Wir sehen dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$$

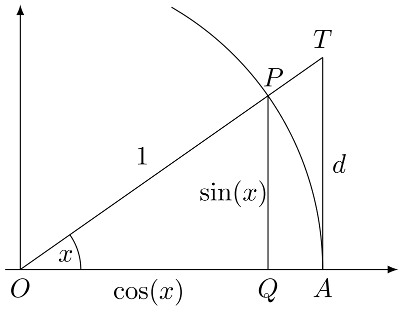
und schreiben

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

9.3.4. *Zwei spezielle Grenzwerte.* Wir leiten nun zwei spezielle Grenzwerte her, welche bei der Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion zur Anwendung kommen (siehe später). Wir interessieren uns als erstes für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Dazu betrachten wir die folgende Grafik:



Hier ist x ein Winkel, das Kreissegment hat Radius eins. Die Koordinaten des Punktes P sind $(\cos(x), \sin(x))$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OQP und OAT folgt

$$\frac{\sin(x)}{d} = \frac{\cos(x)}{1}, \qquad \text{i.e.} \qquad d = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Betrachten wir die Flächen der zwei Dreiecke und des Kreissegments, so sehen wir dass gilt:

$$\text{Fläche Dreieck } OQP < \text{Fläche Kreissegment } OAP < \text{Fläche Dreieck } OAT.$$

Setzt man die mathematischen Ausdrücke für diese Flächen ein, so ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{\sin(x)\cos(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{d}{2},$$

wobei wir verwenden dass die Gesamtfläche des Einheitskreises gegeben ist durch π und die Fläche des Kreissegmentes (mit Winkel x) somit $\frac{x}{2\pi}\pi = \frac{x}{2}$ beträgt. Wir multiplizieren die Ungleichung mit $\frac{2}{\sin(x)}$ und erhalten (man beachte $d = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$)

$$\cos(x) < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Wir wissen dass $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ (siehe Graph der Kosinusfunktion). Somit ist der Grenzwert der linken und rechten Seite der Ungleichung gegeben durch eins. Da die Ungleichung für beliebig kleine Winkel x richtig ist, ist der Grenzwert des mittleren Terms auch gegeben durch eins, i.e. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$. Wir folgern somit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin(x)}} = 1.$$

Nun betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

Dazu schreiben wir den Bruch folgendermassen um:

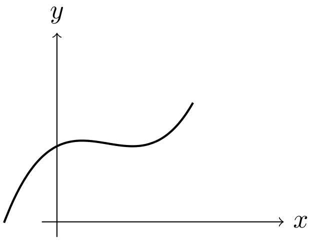
$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x) - 1}{x} &= \frac{(\cos(x) - 1)}{x} \frac{(\cos(x) + 1)}{(\cos(x) + 1)} \\
&= \frac{\cos^2(x) - 1}{x(\cos(x) + 1)} \\
&= -\frac{\sin^2(x)}{x(\cos(x) + 1)} \\
&= -\frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1},
\end{aligned}$$

wobei wir für die dritte Zeile die Pythagorasidentität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ verwenden. Der erste Bruch in der letzten Zeile besitzt den Grenzwert eins für $x \to 0$. Der zweite Bruch in der letzten Zeile besitzt den Grenzwert Null für $x \to 0$, da der Zähler gegen Null strebt und der Nenner gegen zwei. Somit haben wir

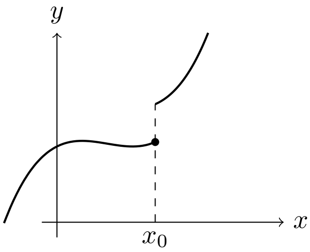
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

9.4. **Stetigkeit einer Funktion.** Wir haben die folgenden Definitionen: Eine Funktion $f(x)$, welche in einer Umgebung von x_0 inklusive x_0 definiert ist, ist *stetig an der Stelle* $x = x_0$, wenn gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Eine Funktion ist *stetig*, wenn sie für alle x-Werte in ihrem Definitionsbereich stetig ist.

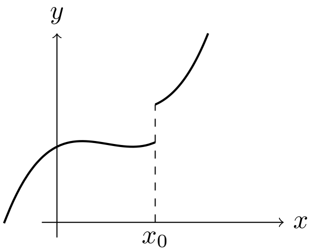
Wir illustrieren den Stetigkeitsbegriff an Beispielen. Wir betrachten die Graphen von verschiedenen Funktionen $f(x)$, ohne die Funktionsgleichungen explizit hinzuschreiben.

(i) 

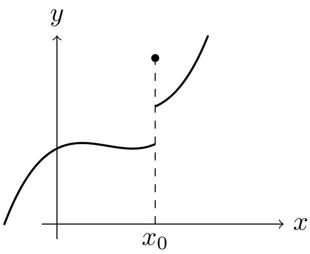
Die betrachtete Funktion ist stetig.

(ii) 

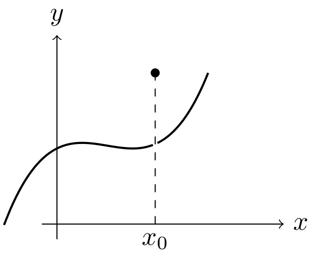
Der links- und rechtsseitige Grenzwert sind verschieden, i.e. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Somit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nicht. Die Funktion ist nicht stetig (=unstetig). Bemerkung: Die Funktion ist an der Stelle $x = x_0$ definiert, der Funktionswert entspricht dem linksseitigen Grenzwert (siehe schwarzer Punkt in der Grafik).

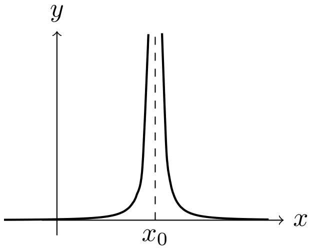
(iii) 

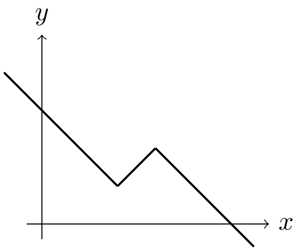
Diese Funktion ist weder stetig noch unstetig an der Stelle $x = x_0$, da sie dort nicht definiert ist (kein schwarzer Punkt in der Grafik, die Funktion hat an der Stelle $x = x_0$ eine Definitionslücke). Allerdings ist die Funktion in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig, somit ist die Funktion $f(x)$ eine stetige Funktion.

(iv) 

Diese Funktion ist an der Stelle $x = x_0$ nicht stetig. Wieder stimmen der rechts- und linksseitige Grenzwert nicht überein. Die Funktion ist an der Stelle $x = x_0$ definiert, der Funktionswert entspricht weder dem links- noch dem rechtsseitigen Grenzwert.

(v)  Diese Funktion ist an der Stelle $x = x_0$ nicht stetig. Der links- und rechtsseitige Grenzwert stimmen überein, somit existiert $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Dieser Grenzwert ist aber nicht gleich dem Funktionswert an der Stelle $x = x_0$ (siehe schwarzer Punkt in der Grafik).

(vi)  Hier ist der Graph der Funktion $f(x) = 1/(x - x_0)^2$ gezeichnet. Die Funktion ist an der Stelle $x = x_0$ weder stetig noch unstetig, da sie an dieser Stelle nicht definiert ist. Allerdings ist die Funktion in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig, somit ist die Funktion $f(x)$ eine stetige Funktion.

(vii)  Diese Funktion ist stetig.

Die obigen Beispiele zeigen dass die Definition der Stetigkeit mit der Intuition übereinstimmt, die sagt dass man einen stetigen Verlauf zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen, vorausgesetzt man befindet sich im Definitionsbereich der Funktion.

10. Differentialrechnung

10.1. **Motivation.** Wir motivieren das Thema in den folgenden zwei Teilabschnitten anhand von einer physikalischen und einer geometrischen Überlegung.

10.1.1. *Geschwindigkeit.* Wir betrachten die Bewegung eines Körpers in einer Dimension. Sei die Position y des Körpers in Abhängigkeit der Zeit t durch die Funktion $y = f(t)$ gegeben. Wir suchen die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt $t = t_0$. Betrachtet man ein Zeitintervall $[t_0, t]$, so liefert die bekannte Formel

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{Zeitdifferenz}}$$

die *Durchschnittsgeschwindigkeit* in dem betrachteten Zeitintervall. Der mathematische Ausdruck für den zurückgelegten Weg ist gegeben durch die Differenz der y-Werte, i.e. $\Delta y = f(t) - f(t_0)$. Die Zeitdifferenz ist $\Delta t = t - t_0$. Eingesetzt erhält man für die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0, t]$

$$v_{t_0,t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[t_0, t]$ stimmt im allgemeinen nicht mit der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 überein (Eine Ausnahme ist der Fall einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit). Jedoch wird die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt

t_0 durch die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[t_0, t]$ approximiert und diese Approximation ist desto besser, je kleiner das Intervall $[t_0, t]$ gewählt wird (i.e. je näher t bei t_0 gewählt wird).

Diese Überlegung legt es nahe die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 zu definieren durch den Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit wenn wir $t - t_0$ gegen Null streben lassen, i.e. wenn wir t gegen t_0 streben lassen.

$$v_{t_0} = \lim_{t \to t_0} v_{t_0,t} = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Als Beispiel betrachten wir einen Stein der in einen Schacht fällt und fragen nach der Geschwindigkeit wenn der Stein die Tiefe von 10 m passiert. Wir wählen y als Variable der Tiefe in Abhängigkeit der Zeit. I.e. der Stein starte bei $y = 0$ und positive y-Werte entsprechen einer Tiefe in welcher sich der Stein zum entsprechenden Zeitpunkt befindet. Wir nehmen an dass: $y = f(t) = \frac{g}{2}t^2$, wobei g die Gravitationskonstante ist und es soll $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gelten.

Zuerst berechnen wir die Zeit zu welcher der Stein die Tiefe $y_0 = 10\,\mathrm{m}$ durchfliegt. Einsetzen von y_0 in $y = \frac{g}{2}t^2$ ergibt $t_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{s}$. Nun berechnen wir die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Zeitintervall $[t_0, t]$. Sie ist

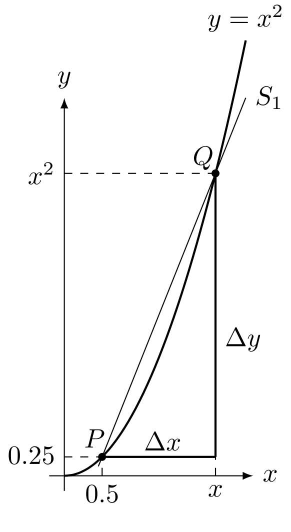
$$\begin{aligned} v_{t_0,t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} &= \frac{\frac{g}{2}t^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{t - t_0} \\ &= \frac{g}{2}\frac{(t^2 - t_0^2)}{(t - t_0)} \\ &= \frac{g}{2}\frac{(t + t_0)(t - t_0)}{t - t_0} \\ &= \frac{g}{2}(t + t_0). \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{s}$ ist nun der Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit wenn t gegen t_0 strebt, i.e.

$$\begin{aligned} v_{t_0} &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{g}{2}(t + t_0) \\ &= g t_0 = 10\sqrt{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

10.1.2. *Tangentensteigung.* Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ und suchen die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion bei $x_0 = 0.5$. Der Graph ist durch $y = x^2$ gegeben und der Punkt durch den die Tangente verläuft hat Koordinaten $P(0.5, 0.25)$. Der Weg zur Tangentensteigung gliedert sich in die folgenden zwei Teile:

(i) Zuerst betrachten wir die Steigung einer Sekante. Dazu wählen wir $x > 0.5$ und betrachten die Sekante welche durch den Punkt $Q(x, x^2)$ und den Punkt P verläuft. Wir nennen diese Sekante S_1.



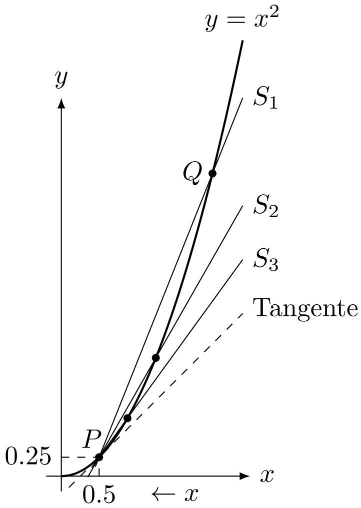
Die Steigung der Sekante S_1 ist gegeben durch den folgenden Ausdruck. Man nennt ihn *Differenzenquotient*:

$$\begin{aligned} m_S &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 - 0.5^2}{x - 0.5} \\ &= x + 0.5. \end{aligned}$$

Diese Steigung der Sekante S_1 ist eine erste Approximierung der Steigung der

Tangente durch den Punkt $(0.5, 0.25)$. Je näher x bei 0.5 liegt, desto besser ist die Approximierung.

(ii) Um von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung zu gelangen betrachten wir den Grenzübergang $x \to 0.5$. Man kann sich also mehrere Sekanten vorstellen (in der Grafik S_1, S_2, S_3, $\ldots$) welche durch den Punkt $(0.5, 0.25)$ und Punkte auf dem Graphen von $f(x)$ verlaufen, welche dem Punkt $(0.5, 0.25)$ immer näher kommen.



Die Steigung der Tangente ist gegeben durch den folgenden Ausdruck. Man nennt ihn *Differentialquotient*:

$$\begin{aligned} m_T &= \lim_{x \to 0.5} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \to 0.5} \frac{x^2 - 0.5^2}{x - 0.5} \\ &= \lim_{x \to 0.5} (x + 0.5) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Tangente liefert die lineare Approximation der Funktion an der Stelle $x = 0.5$.

10.2. **Definition der Ableitung.** Sei $f(x)$ eine Funktion welche in einer Umgebung von x_0 (inklusive x_0) definiert ist. Die *Ableitung* von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist definiert als

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

vorausgesetzt dass dieser Grenzwert existiert.
Bemerkungen:

(i) Die linke Seite der Definition, i.e. $\frac{df}{dx}(x)$ ist Notation und darf nicht als Bruch aufgefasst werden. Alternative Notationen sind

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = f'(x_0) = D_x f(x_0) = \dot{f}(x_0).$$

Die erste Schreibweise ist nach Leibnitz, die mittlere nach Lagrange und die letzte nach Newton. Die Newtonsche Schreibweise wird meist benutzt wenn die unabhängige Variable die Zeit t ist.

(ii) Falls $\frac{df}{dx}(x_0)$ existiert sagt man die Funktion $f(x)$ sei *ableitbar* oder *differenzierbar an der Stelle* x_0.

(iii) Falls die Funktion $f(x)$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist, so ist $f(x)$ eine *differenzierbare Funktion*.

(iv) Physikalisch bedeutet die Ableitung der Position $y = f(t)$ an der Stelle $t = t_0$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0, i.e.

$$v(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0).$$

Dies ist nur eine von vielen Anwendungen der Ableitung in Wissenschaft und Technik. Viele physikalische Gesetze sind durch Ableitungen formuliert.

(v) Geometrisch bedeutet die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ die durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ verläuft.

Als Beispiel berechnen wir die Ableitung der Funktion $g(x) = x^2$ an der Stelle $x = 3$ (i.e. $x_0 = 3$). Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx}(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3^2 + 6h + h^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6.\end{aligned}$$

Geometrisch bedeutet dies dass die Tangente an $y = x^2$ im Punkt $(3, 9)$ die Steigung $m = 6$ besitzt.

Nun berechnen wir nochmals die Ableitung der Funktion $g(x) = x^2$ aber diesmal an einem beliebigen Punkt x. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.\end{aligned}$$

Diese Rechnung verdeutlicht dass die Ableitung wieder als eine Funktion aufgefasst werden kann: Sei

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x).\end{aligned}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{df}{dx}(x).\end{aligned}$$

die Ableitung(sfunktion) von $f(x)$.

10.3. **Ableitung elementarer Funktionen.**

10.3.1. *Konstante Funktion.* Wir betrachten die konstante Funktion, i.e. $f(x) = C$ für ein festes $C \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Definition der Ableitung ergibt

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

I.e. die *Ableitung einer konstanten Funktion* ist

$$\frac{d}{dx}C = 0.$$

Wir sehen dass eine konstante Funktion abgeleitet die Funktion 0 ergibt. Dies ist in Übereinstimmung mit der geometrischen Vorstellung dass der Graph einer konstanten

Funktion einer horizontalen Geraden entspricht und die Steigung der Tangente an diesen Graphen somit immer Null beträgt.

10.3.2. *Potenzfunktion.* Nun betrachten wir die Funktion $f(x) = x$.

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.\end{aligned}$$

I.e.

$$\frac{d}{dx}x = 1.$$

Auch dies stimmt mit der geometrischen Vorstellung überein. Die Steigung des Graphen der Funktion $f(x) = x$ ist konstant und gleich 1.

Nun betrachten wir die Funktion $f(x) = Cx$.

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{C(x+h)-Cx}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{Ch}{h} = \lim_{h\to 0} C = C.\end{aligned}$$

I.e.

$$\frac{d}{dx}(Cx) = C.$$

Die geoemtrische Vorstellung ist analog zum Beispiel $f(x) = x$, allerdings ist die Steigung nun gleich C.

Wie wir bereits gesehen haben ist die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ gegeben durch $\frac{df}{dx}(x) = 2x$. I.e.

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x.$$

Nun betrachten wir die Funktion $f(x) = x^3$.

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)\\ &= 3x^2.\end{aligned}$$

I.e.

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2.$$

Analog zu den Rechnungen für $f(x) = x, x^2, x^3$ können wir alle Potenzfunktionen mit ganzzahligem positivem Exponent ableiten. Wir leiten nun eine allgemeine Formel für die Ableitung solcher Potenzfunktionen her, i.e. wir betrachten die Funktion $f(x) = x^n$

für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} xh^{n-1} + \binom{n}{n} h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} xh^{n-1} + \binom{n}{n} h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} xh^{n-1} + \binom{n}{n} h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n-1} xh^{n-2} + \binom{n}{n} h^{n-1} \right) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

wobei wir für den Ausdruck $(x+h)^n$ die Binomialentwicklung verwendet haben und die Gleichungen $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$. I.e. die *Ableitung einer Potenz* ist (dies nennt man die *Potenzregel*)

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

10.4. **Ableitung von Polynomen.** Nun betrachten wir die Ableitung von Polynomen. Dazu formulieren wir zuerst ein Resultat über Grenzwerte, welches wir ohne explizit darauf hinzuweisen bereits benutzt haben (zum Beispiel bei der Berechnung der Grenzwerte $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$).

Seien $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen, so dass die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x), \\
\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}, \quad \text{vorausgesetzt} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Das Resultat sagt also aus dass die Reihenfolge (zuerst Funktionen addieren, dann Grenzwert bilden oder umgekehrt und analog für Multiplikation, Division) keine Rolle spielt.

10.4.1. *Ableitung einer Summe von Funktionen.* Sei $s(x) = f(x) + g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \\
&= \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x).
\end{aligned}$$

Hier wird von der dritten auf die vierte Zeile der Grenzwert einer Summe als Summe von Grenzwerten umgeschrieben. I.e. wir haben die *Summenregel*

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)+g(x)\Big) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x).$$

Sei beispielsweise $g(x) = C$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(f(x)+C\Big) &= \frac{df}{dx}(x) + \frac{d}{dx}C \\ &= \frac{df}{dx}(x).\end{aligned}$$

10.4.2. *Faktorregel.* Wir betrachten Funktionen der Form $g(x) = Cf(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{Cf(x+h)-Cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(C\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \\ &= C\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= C\frac{df}{dx}(x),\end{aligned}$$

wobei wir von der dritten zur vierten Zeile einen Grenzwert eines Produktes als Produkt von Grenzwerten umgeschrieben und $\lim_{h\to 0} C = C$ verwendet haben. I.e. wir haben die *Faktorregel*

$$\frac{d}{dx}\Big(Cf(x)\Big) = C\frac{df}{dx}(x).$$

10.4.3. *Polynome.* Nun verwenden wir die Summen- und Faktorregel zusammen mit dem Potenzgesetz um Polynome abzuleiten. Wir betrachten das Beispiel $p(x) = 4x^3 + 3x$. Die Ableitung von $p(x)$ ist

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left(4x^3+3x\right) \\ &= \frac{d}{dx}(4x^3) + \frac{d}{dx}(3x) \\ &= 4\frac{d}{dx}x^3 + 3\frac{d}{dx}x \\ &= 4\cdot 3x^2 + 3\cdot 1 = 12x^2 + 3.\end{aligned}$$

Für ein allgemeines Polynom der Ordnung n haben wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k &= \sum_{k=0}^{n}\frac{d}{dx}(a_k x^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\frac{d}{dx}x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}.\end{aligned}$$

Es ist wichtig zu sehn dass die neue Summe nur noch aus n Termen besteht (das ursprüngliche Polynom besteht aus $n+1$ Termen), da die Ableitung des letzten Terms verschwindet, i.e. $\frac{d}{dx}a_0 = 0$.

10.5. **Wurzelfunktion.** Sei $f(x) = \sqrt{x}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

I.e.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

10.6. **Sinus- und Kosinusfunktion.** Sei $f(x) = \sin(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\sin(h) + \sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(h)}{h} \cos(x) + \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(h)}{h} \cos(x) \right) + \lim_{h\to 0} \left(\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) \\
&= \cos(x),
\end{aligned}$$

wobei wir für die dritte Zeile das Additionstheorem für den Sinus und in der zweitletzten Zeile die Grenzwerte $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ und $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$ verwendet haben (siehe oben). Analog findet man $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$. I.e.

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

Man beachte das Minuszeichen in der zweiten Gleichung.

10.7. **Exponentialfunktion.** Wir erinnern uns zuerst an die Definition der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Nun leiten wir die Exponentialfunktion ab. Sei also $f(x) = e^x$. Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\\ &= \frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\right)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x.\end{aligned}$$

I.e. wir finden

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

10.8. **Ableitung von Produkten und Quotienten.**

10.8.1. *Produkt von Funktionen.* Sei $p(x) = f(x)g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h) - p(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)\\ &= f(x)\frac{dg}{dx}(x) + g(x)\frac{df}{dx}(x).\end{aligned}$$

I.e. wir haben die *Produktregel*

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x).$$

Als Beispiel berechnen wir die Ableitung von $f(x) = (2x+1)(3x-2)$ auf zwei unterschiedliche Arten. Zuerst durch ausmultiplizieren und dann ableiten als Polynom:

$$\frac{d}{dx}(2x+1)(3x-2) = \frac{d}{dx}(6x^2 - x - 2) = 12x - 1.$$

Nun als Ableitung eines Produktes:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x+1)(3x-2) &= \left(\frac{d}{dx}(2x+1)\right)(3x-2) + (2x+1)\frac{d}{dx}(3x-2)\\ &= 2(3x-2) + (2x+1)3 = 12x - 1.\end{aligned}$$

10.8.2. *Quotient von Funktionen.* Analog zur Herleitung der Produktformel findet man die *Quotientenregel*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df}{dx}(x)g(x) - f(x)\frac{dg}{dx}(x)}{g(x)^2}.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^3-2x}\right) &= \frac{\left(\frac{d}{dx}(x^2+1)\right)(x^3-2x) - (x^2+1)\frac{d}{dx}(x^3-2x)}{(x^3-2x)^2}\\ &= \frac{2x(x^3-2x) - (x^2+1)(3x^2-2)}{(x^3-2x)^2}\\ &= \frac{-x^4 - 5x^2 + 2}{(x^3-2x)^2}.\end{aligned}$$

10.8.3. *Potenzgesetz mit negativem Exponent.* Sei $f(x) = 1$, $g(x) = x^m$ mit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann ist $x^{-m} = \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^{-m}) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\\ &= \frac{\frac{df}{dx}(x)g(x) - f(x)\frac{dg}{dx}(x)}{g(x)^2}\\ &= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}\\ &= -mx^{-m-1}.\end{aligned}$$

Somit gilt die Potenzregel auch für negative ganze Zahlen. I.e. die *Potenzregel* lautet

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Beispielsweise ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^7}\right) = -\frac{21}{x^8}.$$

10.9. **Ableitung zusammengesetzter Funktionen.** Sei $F(x)$ die Hintereinanderschaltung der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, i.e. $F(x) = f(g(x))$. Nun betrachten wir die Ableitung von $F(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}\;\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\\ &= \lim_{H\to 0}\frac{f(g(x)+H) - f(g(x))}{H}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\\ &= \frac{df}{dx}(g(x))\frac{dg}{dx}(x),\end{aligned}$$

wobei wir für die fünfte Zeile die Variable $H = g(x+h)-g(x)$ verwenden. Dieses Resultat nennt man die *Kettenregel*

$$\frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = \frac{df}{dx}(g(x))\frac{dg}{dx}(x).$$

Der Term $\frac{df}{dx}(g(x))$ heisst *Äussere Ableitung* und der Term $\frac{dg}{dx}(x)$ heisst *innere Ableitung.*

Beispiele:

(i) Die Funktion $F(x) = (2x+1)^3$ ist zusammengesetzt aus der Funktion $f(x) = x^3$ und $g(x) = 2x+1$, i.e. $F(x) = f(g(x))$. Die Ableitung von $f(x)$ ist $\frac{df}{dx}(x) = 3x^2$ und die Ableitung von $g(x)$ ist $\frac{dg}{dx}(x) = 2$. Die Ableitung von $F(x)$ ist

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(g(x))\frac{dg}{dx}(x).$$

Wir haben

$$\frac{df}{dx}(g(x)) = 3(2x+1)^2, \qquad \frac{dg}{dx}(x) = 2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}(g(x))\frac{dg}{dx}(x)\\ &= 3(2x+1)^2 2 = 6(2x+1)^2.\end{aligned}$$

(ii) Die Funktion $F(x) = \sin^2(x)$ ist zusammengesetzt aus $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$, i.e. $F(x) = f(g(x))$. Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}(g(x))\frac{dg}{dx}(x)\\ &= 2\sin(x)\cos(x).\end{aligned}$$

(iii) Die Funktion $F(x) = \sqrt{1+x^3}$ ist zusammengesetzt aus $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 1 + x^3$, i.e. $F(x) = f(g(x))$. Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}(g(x))\frac{dg}{dx}(x)\\ &= \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Verwendet man $y = f(u)$, $u = g(x)$ dann ist $y = f(g(x))$ und mit der Notation $\frac{dy}{dx}$ ergibt sich die folgende Darstellung der Kettenregel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Beispiel: Aus $y = \sin(u)$, $u = x^2$ folgt $y = \sin(x^2)$. Somit ist die Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\\ &= \cos(u)2x\\ &= \cos(x^2)2x.\end{aligned}$$

10.10. **Ableitung der inversen Funktion.** Wir betrachten die Komposition einer Funktion f und ihrer inversen Funktion f^{-1}, i.e. $f(f^{-1}(x)) = x$. Wir lassen hier und im folgenden die Diskussion des Geltungsbereiches dieser Gleichung weg und nehmen an dass wir uns jeweils auf den entsprechenden Bereich einschränken. Wir haben

$$\begin{aligned}1 = \frac{d}{dx}x &= \frac{d}{dx}f(f^{-1}(x))\\ &= \frac{df}{dx}(f^{-1}(x))\frac{df^{-1}}{dx}(x),\end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile die Kettenregel verwendet haben. Division dieser Gleichung durch $\frac{df}{dx}(f^{-1}(x))$ ergibt die folgende Formel für die *Ableitung der inversen Funktion*:

$$\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(x))}.$$

Beispiele:

(i) Wir haben diese Vorgehensweise bereits bei der Ableitung des Logarithmus benutzt. Es gilt $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \log(x)$. Wir haben $\frac{df}{dx}(x) = e^x$ und somit $\frac{df}{dx}(f^{-1}(x)) = e^{\log(x)} = x$ und die obige Formel liefert das bereits bekannte Resultat

$$\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}.$$

(ii) Wir bestimmen die Ableitung der Funktion $\arcsin(x)$. Sei also $f(x) = \sin(x)$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$. Wir haben $\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ und die obige Formel ergibt

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Wir vereinfachen diesen Ausdruck wie folgt. Aus $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ folgt[6] $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Damit können wir den obigen Nenner umschreiben zu

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Somit erhalten wir

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

10.11. **Ableitungen höherer Ordnung.** Im folgenden gehen wir davon aus dass alle betrachteten Funktionen (und ihre Ableitungen) differenzierbar sind. Wir betrachten eine Funktion $f(x)$. Ihre Ableitung $\frac{df}{dx}(x)$ ist wieder eine Funktion. Somit kann diese Funktion wieder abgeleitet werden. Man nennt die Ableitung einer Ableitung einer Funktion $f(x)$ die *zweite Ableitung* von $f(x)$ und schreibt $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$. Analog ergibt sich die *n-te Ableitung* einer Funktion $f(x)$ durch n-maliges Ableiten der Funktion $f(x)$ und man schreibt $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$. Auch üblich ist die Bezeichnung *Ableitung n-ter Ordnung.*

In der Notation nach Lagrange und Newton werden die Ableitungen höherer Ordnung wie folgt geschrieben:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f}{dx^2}(x) &= f''(x) = \ddot{f}(x), \\
\frac{d^3 f}{dx^3}(x) &= f'''(x) = \dddot{f}(x), \\
\frac{d^n f}{dx^n}(x) &= f^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

Die Notation von Newton wird für Ableitungen der vierten und höheren Ordnung nicht verwendet.

Die physikalische Relevanz der zweiten Ableitung eines Wegverlaufs ist die Beschleunigung. Die dritte Ableitung eines Wegverlaufs wird als *Ruck* bezeichnet. Die geometrische Relevanz der zweiten Ableitung ist die Krümmung.

Leitet man ein Polynom n-ter Ordnung m-mal ab, wobei $m > n + 1$, so verschwindet die erhaltene Funktion. Eine Funktion, welche kein Polynom ist kann beliegig oft abgeleitet werden, ohne dass die Funktion verschwindet.

[6]Wir behalten nur die +-Lösung da $\cos(x)$ im Geltungsbereich der Gleichung $\arcsin(\sin(x)) = x$ positiv ist (dieser Geltungsbereich ist das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

11. Aufgaben

Aufgabe 1. Man bestimme alle Teilmengen der Menge $\{a, b, c, d\}$.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $(A \cap B) \subset A$
(ii) $A \subset (A \cup B)$
(iii) $(A \cup B) \subset [(A \cup B) \backslash A]$
(iv) $(A \backslash B) \cap B = \{\}$

Aufgabe 3. Man vereinfache

(i) $(A \cap B) \cap (A \backslash B)$
(ii) $(A \cap B) \cup (A \backslash B)$
(iii) $A \backslash (A \backslash B)$

Aufgabe 4. Für die untenstehenden Teilmengen der reellen Zahlen I und J finde man jeweils:

$$I \cap J \qquad I \cup J \qquad I \backslash J \qquad J \backslash I$$

(i) $I = (2, 7),\ J = (5, 9)$
(ii) $I = (-\infty, -10),\ J = (-12, 25)$
(iii) $I = (-10, 10],\ J = [10, 20)$
(iv) $I = [-0.3, 1/3),\ J = (0.3, 7/3]$

Aufgabe 5. Man berechne $|2 - a| - |b + 1| + |a + b|$ mit den Werten

(i) $a = 3$, $b = 5$
(ii) $a = 2$, $b = -4$

Aufgabe 6. Man überprüfe ob der Wert des Ausdrucks $(3 - a)(b + ac)$ unter den Bedingungen $|a| \leq 2$, $|b| \leq 5$ und $|c| \leq 4$ den Wert 80 überschreitet.

Aufgabe 7. Für welche reellen Zahlen gilt

(i) $|x| = -x$
(ii) $|x| = x$
(iii) $x = -x$
(iv) $|x| = |-x|$
(v) $|x|^2 = x^2$
(vi) $|x| < 3$

Aufgabe 8. Man bestimme die folgenden Mengen (als Intervall/Ausdruck von Intervallen)

(i) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x - 3 < 0\}$
(ii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | (x - 3)x < 0\}$
(iii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | (x - 3)(x - 5) \geq 0\}$

Aufgabe 9. Man löse die folgenden Gleichungen

(i) $|y| = 3$
(ii) $|2t + 5| = 4$
(iii) $|8 - 3s| = 9/2$

Aufgabe 10. Man löse die folgenden Ungleichungen

(i) $|2s| \geq 4$
(ii) $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 1$

(iii) $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$

Aufgabe 11. Man bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\begin{cases} |x+3| \leq & 2 \\ \quad x^2 \geq & 16\,. \end{cases}$$

Aufgabe 12. Man bestimme den grösstmöglichen Definitionsbereich und das zugehörige Bild von

(i) $f(x) = 1 + x^2$
(ii) $g(x) = \sqrt{5x+10}$
(iii) $h(t) = \dfrac{4}{3-t}$
(iv) $f(x) = 5 - 2x$
(v) $g(x) = \sqrt{|x|}$
(vi) $h(t) = t/|t|$

Aufgabe 13. Man bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen.
(i) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+1}$
(ii) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
(iii) $f(x) = (x-1)e^x$

Aufgabe 14. Man bestimme für die folgenden Funktionen das Symmetrieverhalten (i.e. sind die Funktionen gerade, ungerade, beides, weder noch). Hinweis: Man verwende dass es sich bei $\sin(x)$ um eine ungerade und bei $\cos(x)$ um eine gerade Funktion handelt.

(i) $f(x) = 4x^2 - 16$
(ii) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$
(iii) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
(iv) $f(x) = |x^2 - 4|$
(v) $f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$
(vi) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$
(vii) $f(x) = \frac{1}{x-1}$
(viii) $f(x) = 4\sin^2(x)$

Aufgabe 15. Sei f eine gerade Funktion und sei g eine ungerade Funktion.
(i) Man zeige dass fg eine ungerade Funktion ist.
(ii) Man zeige dass die Komposition $f \circ g$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 16.
(i) Seien

$$f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Man zeige dass $f_1(x)$ eine ungerade und $f_2(x)$ eine gerade Funktion ist.
(ii) Sei $f(x)$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Seien

$$g_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \qquad g_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Man zeige dass $g_1(x)$ eine ungerade und $g_2(x)$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 17. Man bestimme die Periode p der folgenden Funktionen
(i) $f(x) = \sin(2x)$
(ii) $f(x) = \sin(x/2)$
(iii) $i(t) = I\sin(\omega t + \phi_0)$, wobei I, $\omega, \phi_0 \in \mathbb{R}$ konstanten sind.

Aufgabe 18. Seien die drei Funktionen f, g und h definiert durch

$$f(x) = x^2 - 1, \qquad g(x) = \frac{x}{x^2+1}, \qquad h(x) = x^3.$$

Man bestimme die folgenden Ausdrücke

(i) $a(x) = (f \cdot g)(x) + h(x)$
(ii) $b(x) = (f \circ g)(x) + h(x)$
(iii) $c(x) = (g \circ f)(x)$
(iv) $d(x) = \dfrac{h(x)}{f(x)}$
(v) $e(x) = (h \circ (f \cdot f))(x)$

Aufgabe 19. Sei

$$f(x) = x^3 + x + 1, \qquad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Man finde
(i) den Definitionsbereich von $f \cdot g$,
(ii) den Definitionsbereich von $g \circ f$,

Aufgabe 20. Man ergänze die folgende Tabelle:

$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
$x-7$	$\sqrt{x}$	?
$x+2$	$3x$	?
?	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	?
?	$1+\frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{x}$	?	x

Aufgabe 21. Man bestimme die untenstehenden Ausdrücke unter Verwendung von

$$f(x) = 2 - x, \qquad g(x) = \begin{cases} -x & -2 \le x < 0 \\ x - 1 & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

(i) $f(g(0))$
(ii) $f(f(2))$
(iii) $g(f(3))$
(iv) $g(f(0))$
(v) $g(g(-1))$
(vi) $f(g(1/2))$

Aufgabe 22.
(i) Sei $f(x)$ eine periodische Funktion mit Periode $p = 4$. Man bestimme die Perioden der folgenden Funktionen:

$$g(x) = f(x) + 3, \qquad h(x) = f(x+2), \qquad k(x) = 2f(x/2).$$

(ii) Sei $q(x)$ eine periodische Funktion mit Periode $p = 3$ und der Eigenschaft

$$q(x) = \begin{cases} |x| + 2 & -1 \le x \le 1, \\ 3 & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Man skizziere den Graphen $y = q(x)$ für $x \in [-3, 6]$ und berechne $q(11/2)$.

Aufgabe 23. Man untersuche die folgenden Funktionen und entscheide ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Man bestimme auch $\mathrm{Im}(f)$.
(i) $f : [0, 5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$
(ii) $f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad f(x) = x^2$
(iii) $f : [-2, 5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$
(iv) $f : [-2, 5] \to [0, 25], \quad f(x) = x^2$
(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$
(vi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - x.$

Aufgabe 24. Man bestimme für die folgenden Funktionen an Hand des Graphen ob sie injektiv sind:

(i)
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & x < 0 \\ 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

(ii)
$$g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 25. Man berechne die inverse Funktion der folgenden Funktionen und überprüfe dass $f^{-1}(f(x)) = x$ (Wir nehmen an dass der Definitionsbereich und der Bildbereich so gewählt sind dass die Funktionen bijektiv sind).

(i) $f(x) = 3 - 29x$

(ii) $f(x) = \sqrt{x-3}$

(iii) $f(x) = \dfrac{x+4}{2x-5}$

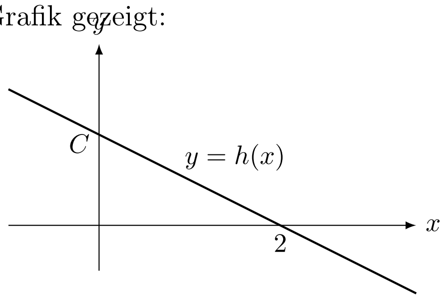
(iv) $f(x) = x^3 + 6$

(v) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

Aufgabe 26.

(i) Man bestimme ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder weder noch sind:
$$f(x) = \frac{x}{x^3+3}, \qquad g(x) = |x-1| + |x+1|.$$

(ii) Die Lösungen dieser Teilaufgabe können die Konstante C beinhalten. Im folgenden ist $C > 0$ eine feste reelle Zahl. Der Graph der linearen Funktion $h(x)$ ist in folgender Grafik gezeigt:



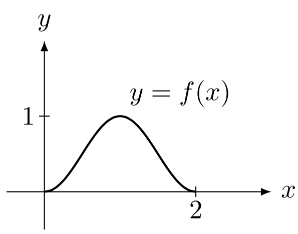
(a) Man bestimme die Funktionsgleichung von $h^{-1}(x)$, skizziere den dazugehörigen Graphen und trage insbesondere die Schnittpunkte mit den Achsen ein.

(b) Für welchen Wert von k ist $h(x) + k$ eine ungerade Funktion?

(c) Für welchen Wert von k ist $|h(x+k)|$ eine gerade Funktion?

Aufgabe 27. Über eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weiss man dass sie ungerade ist und periodisch mit Periodenlänge 4. Für $0 \leq x \leq 2$ entspricht der Graph von f einer Standardparabel, welche so verschoben und gespiegelt ist, dass sie durch die Punkte $(1,1)$ und $(2,0)$ geht. Man zeichne den Graphen für $-4 < x < 6$ und bestimme $f(-2.5)$.

Aufgabe 28. Die untenstehende Figur zeigt den Graphen einer Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich $[0,2]$ und Bild $[0,1]$.



Man finde den Definitionsbereich D und das Bild B der folgenden Funktionen und skizziere deren Graph.

(i) $f(x)+2$
(ii) $f(x)-1$
(iii) $2f(x)$
(iv) $-f(x)$
(v) $f(x+3)$
(vi) $f(x-1)$
(vii) $-f(-x)$
(viii) $-f(x+1)+1$
(ix) $\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x)-1$

Aufgabe 29. Man skizziere die Graphen der folgenden Funktionen.

(i) $f(x)=\sqrt{x}+4$
(ii) $f(x)=x^3-2$
(iii) $f(x)=|x+2|$
(iv) $f(x)=(x-5)^2$
(v) $f(x)=\sqrt{x+4}-3$
(vi) $f(x)=|x+7|+2$
(vii) $f(x)=2x^2+8x-12$
(viii) $f(x)=4\sin(2x+\pi)+2$
(ix) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2$

Aufgabe 30. Sei

$$h(x)=\begin{cases} 0 & x<0, \\ 1 & x\geq 0. \end{cases}$$

Man skizziere die Graphen der Funktionen

(i) $h(x)$,
(ii) $l(x)=2h(-x)-1$,
(iii) $m(x)=h(2x+1)$,
(iv) $n(x)=xh(x)$,
(v) $p(x)=h(x-2)-h(x-3)$,
(vi) $q(x)=h(h(x))$.

Aufgabe 31.

(i) Man bestimme den Grad und die Polynomkoeffizienten der Funktion
$$f: x\mapsto -2x(x-1)(x+3)^2.$$
(ii) Sei $f(x)=x^2+3x$ und $g(x)=2x+1$. Man bestimme den Grad von $(f+g)(x)$, $(fg)(x)$ und $f(g(x))$.
(iii) Sei $f(x)$ eine ganzrationale Funktion vom Grad m und sei $g(x)$ eine ganzrationale Funktion vom Grad n. Die Koeffizienten der höchsten Exponenten seien gleich. Man bestimme den Grad der ganzrationalen Funktionen $(f+g)(x)$, $(fg)(x)$ und $f(g(x))$.

Aufgabe 32.

(i) Gegeben ist die Gerade g mit Funktionsgleichung $y=\frac{3}{5}x+1$ und der Punkt $P(-1,-4)$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Geraden h, welche parallel zu g verläuft und durch den Punkt P geht?
(ii) Die Gerade i schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0=\frac{74}{15}$ und die Gerade g aus (i) an der Stelle $x_1=2$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Geraden i?

Aufgabe 33.

(i) Man bestimme für die folgenden Funktionen das Symmetrieverhalten (i.e. sind die Funktionen gerade, ungerade, weder noch):
$$f(x)=3x^2+|x|+1, \qquad g(x)=(x^2+4)(x-2)(x+2).$$
(ii) Der Graph der linearen Funktion $h(x)$ verläuft durch die Punkte mit Koordinaten $(4,0)$ und $(0,2)$. Man finde die Konstante k, so dass die Funktion $h(x)+k$ eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 34. Seien zwei lineare Funktionen gegeben: $f(x) = mx + b$ und $g(x) = Mx + B$.

(i) Man zeige dass $(f + g)(x)$ wieder eine lineare Funktion ist und berechne deren Steigung und y-Achsenabschnitt.
(ii) Man zeige dass $(f \circ g)(x)$ wieder eine lineare Funktion ist und berechne deren Steigung und y-Achsenabschnitt.
(iii) Sei $b = 0$ und seien μ, ν zwei Konstanten. Man zeige $f(\mu x+\nu y) = \mu f(x)+\nu f(y)$.

Aufgabe 35. Eine Gerade gehe durch die beiden (unterschiedlichen) Punkte mit Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2). Man finde die Geradengleichung in der Form $y = mx+b$, i.e. man finde Ausdrücke für m und b in Abhängigkeit der Koordinaten der gegebenen Punkte.

Aufgabe 36. Für welche Werte von C hat die Gleichung $2x^2 - 5x + C = 0$ zwei reelle Lösungen.

Aufgabe 37. Man löse die folgenden Gleichungen:

(i) $x^2 + 2x = 7$
(ii) $3q^2 + 11 = 5q$
(iii) $7t^2 = 6 - 19t$
(iv) $\frac{3}{y-2} = \frac{1}{y} + 1$
(v) $16x - x^2 = 0$

Aufgabe 38. Man zeige das Resultat zu den Linearfaktoren aus der Vorlesung.

Aufgabe 39. Man finde eine quadratische Gleichung zu den Lösungen:

(i) -9, 1
(ii) $-\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$
(iii) $5 \pm 3j$
(iv) $-\frac{9}{7}$ (doppelt)

Aufgabe 40. Man bringe die folgenden Funktionsgleichungen durch quadratisches Ergänzen in Scheitelform.

(i) $y = x^2 + 4x + 5$
(ii) $y = 2x^2 - \frac{1}{2}x + 1$
(iii) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

Aufgabe 41. Sei die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ gegeben. Man leite die Koordinaten des Scheitelpunktes in Abhängigkeit der Parameter a, b und c her. Hinweis: Quadratisch ergänzen.

Aufgabe 42. Sei

$$f(x) = x^2 - 7x + 12.$$

(i) Man ergänze quadratisch um die Funktionsgleichung $y = f(x)$ in Scheitelform zu schreiben. Man bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes S.
(ii) Man schreibe die Funktionsgleichung $y = f(x)$ in der Produktform, i.e. als Produkt von Linearfaktoren.
(iii) Man bestimme die Lösungsmenge von $f(x) \geq 0$.

Aufgabe 43. Man führe die Polynomdivision durch für $(2x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 4x - 8) : (x - 1)$.

Aufgabe 44. Man bestimme den Rest der Division $(x^3 - 3x^2 - 28x + 65) : (x - 2)$.

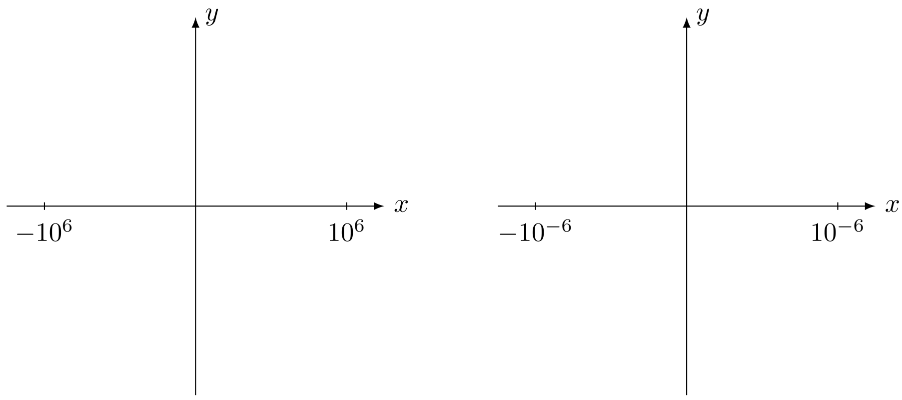
Aufgabe 45. Man schreibe $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$ als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 46. Sei $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$. f habe die Nullstellen $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Man schreibe $f(x)$ als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 47. Sei

$$f(x) = -2x^5 + 8x^4 - 17x^3 + 31x^2 - 4x + 2.$$

(i) Man skizziere (qualitativ) in den beiden untenstehenden Koordinatensystemen den Graphen $y = f(x)$. Man wähle die Skaleneinteilung auf der vertikalen Achse so, dass der dargestellte Bereich dem Bild des horizontalen Intervalls entspricht.



(ii) Man bestimme $r \in \mathbb{R}$ in der Gleichung

$$\frac{f(x)}{x-1} = g(x) + \frac{r}{x-1},$$

wobei $g(x)$ eine ganzrationale Funktion ist.

Aufgabe 48. Man zerlege die Funktion $f(x) = \dfrac{4x^4 - 2x + 5}{x^2 - 3x - 1}$ in eine Summe einer ganzrationalen und einer echt gebrochen rationalen Funktion.

Aufgabe 49. Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

mit

$$g(x) = -x^3 - x^2 + 8x + 12, \qquad g(3) = 0,$$
$$h(x) = x + 1.$$

(i) Man bestimme die Definitionslücken, Nullstellen und Polstellen.
(ii) Man bestimme die Asymptote.
(iii) Man skizziere den Graph.

Aufgabe 50. Sei die Funktion $f(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-7)(x+1)}$ gegeben. Man bestimme die Definitionslücken, die Nullstellen und die Polstellen von $f(x)$. Man zeichne den Graphen von $f(x)$.

Aufgabe 51. Sei $f(x) = g(x)/h(x)$ mit $g(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ und $h(x) = x - 1$. $g(x)$ besitzt eine Nullstelle bei $x = 2$. Man finde die Definitionslücken, Nullstellen, Pole, Asymptoten und man skizziere den Graphen der Funktion.

Aufgabe 52. Man finde Nullstellen, Pole, Asymptoten und den Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$.

Aufgabe 53. Man finde Definitionsbereich, Nullstellen, Pole, Asymptoten und den Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^3-5x^2-2x+24}{x^3+3x^2+2x}$. Der Zähler hat die Nullstelle $x = -2$.

Aufgabe 54. Man bestimme Nullstellen, Pole und Asymptoten der Funktion $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-25)}{x^3+4x^2-5x}$.

Aufgabe 55. Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & x < 0, \\ \frac{x^2-2}{x+1} & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(i) Man bestimme $(f(1))^2$ und $(f \circ f)(1)$.
(ii) Man skizziere den Graphen $y = f(x)$.
(iii) Ist $f(x)$ injektiv? Man begründe die Antwort mit dem Graphen.

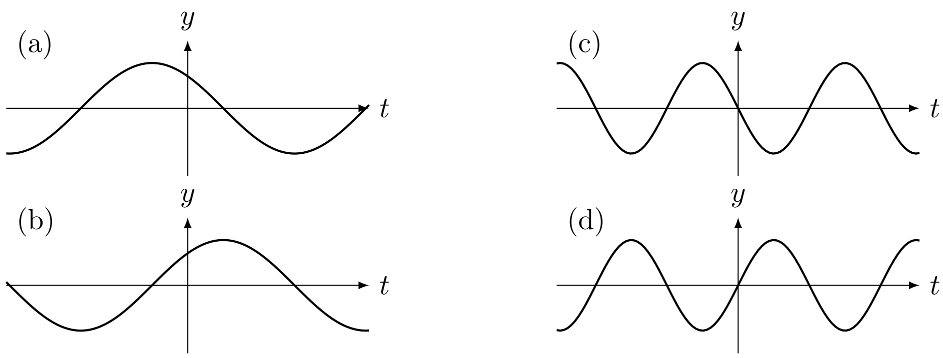
Aufgabe 56. Ausgehend von den Graphen der Funktionen $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ und $y = \tan(x)$, zeichne man die Graphen der folgenden Funktionen.

(i) $y = \sin(2x)$
(ii) $y = 2 + \sin(3x)$
(iii) $y = 2\cos(3x)$
(iv) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
(v) $y = 4\sin\left(\frac{x}{3}\right)$
(vi) $y = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)$
(vii) $y = \sin(|x|)$
(viii) $y = |\sin(x)|$

Aufgabe 57. Unten sind die Graphen der vier folgenden Funktionen gezeichnet

(i) $\cos(2t + \pi/2)$
(ii) $\cos(2t - \pi/2)$
(iii) $\cos(t + \pi/4)$
(iv) $\cos(t - \pi/4)$

Man bestimme, welcher Graph zu welcher Funktion gehört. Die Skalierung der Achsen ist für die vier Graphen identisch.



Aufgabe 58. Man bestimme die Periode der folgenden Funktionen und untersuche ob sie gerade oder ungerade sind (Hinweis: Für die Funktion $\tan(x)$ verwenden wir dass sie periodisch ist mit Periode π, auch wenn dies nicht mit unserer Definition von Periodizität vereinbar ist).

(i) $y = \sin(2x)$

(ii) $y = \sin(3x) + \cos(3x)$

(iii) $y = 3\tan(x)$

(iv) $y = 4\sin(3x)$

(v) $y = \cos(3x - \frac{\pi}{2})$

(vi) $y = \sin^2(x)$

Aufgabe 59.

(i) Für welche Werte von x gilt $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$?

(ii) Für welche Werte von x gilt $\cos^{-1}(\cos(x)) = x$?

Aufgabe 60. Man bestimme (i) $\arcsin(1/2)$, (ii) $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$, (iii) $\arcsin(\sin(\pi))$.

Aufgabe 61. Man bestimme (i) $\arccos(\sqrt{2}/2)$, (ii) $\arccos(\sin(3\pi/4))$, (iii) $\arccos(\sin(3\pi))$.

Aufgabe 62. Man bestimme (i) $\arctan(1)$, (ii) $\arctan(\sqrt{3})$, (iii) $\arctan(\tan(5\pi/4))$.

Aufgabe 63. Die Funktion $\cot(x)$ (Kotangens) ist definiert durch

$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(i) Man finde den Definitions- und Bildbereich dieser Funktion.

(ii) Man skizziere den Graphen für den bereich $-2 \leq x \leq 7$.

(iii) Es gibt eine natürliche Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Man skizzieren den Graphen davon und bestimme den Wert $f^{-1}(-\sqrt{3})$.

Aufgabe 64. Sei

$$f(x) = \sin^{-1}(\sin(x)).$$

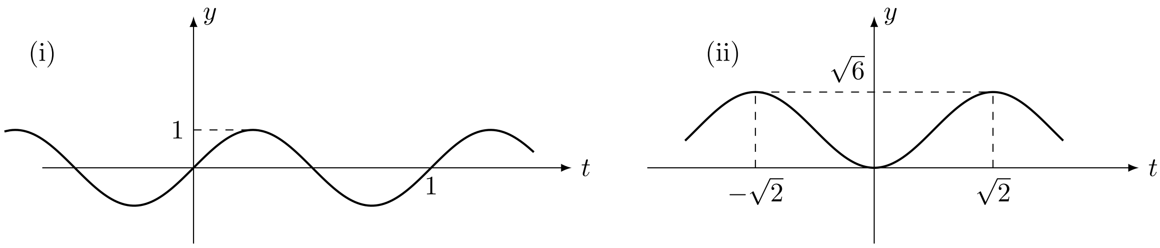
(i) Man bestimme $f(\pi/4)$ und $f(3\pi/4)$.

(ii) Man bestimme den Definitionsbereich von $f(x)$.

(iii) Man skizziere die Funktion $f(x)$ für $x \in [0, \pi]$.

Aufgabe 65. Die folgenden Graphen sind Sinusförmig. Man modelliere sie durch eine Funktion der Form

$$f(x) = A\cos(Bt + C) + D.$$



Aufgabe 66. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-x+3} + 2 & x < 3, \\ 2\sqrt{x-3} + 2 & x \geq 3. \end{cases}$$

(i) Man bestimme den grösstmöglichen Definitionsbereich und das Bild.

(ii) Man skizziere den Graphen.

(iii) Ist die Funktion injektiv, surjektiv, bijektiv?

(iv) Man bestimme die inverse Funktion.

Aufgabe 67. Man schreibe mit Hilfe des Summenzeichens

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{20}{2^{20}}$
(ii) $1+3+5+7+\ldots+99$
(iii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{101}$

Aufgabe 68. Gegeben sei

$$\sum_{i=12}^{22} 2^{i-5}.$$

Man führe die Indextransformation so durch, dass

(i) der allgemeine Summand 2^k lautet,
(ii) die untere Indexgrenze bei $m=0$ liegt,
(iii) die obere Indexgrenze bei $n=50$ liegt.

Aufgabe 69. Man zeige

$$\text{(i)}\ \binom{n}{0}=1, \qquad \text{(ii)}\ \binom{n}{n}=1, \qquad \text{(iii)}\ \binom{n}{1}=n, \qquad \text{(iv)}\ \binom{n}{n-1}=n$$

Aufgabe 70. (optional) Man zeige (diese Gleichung zeigt dass sich im Pascalschen Dreieck ein Binomialkoeffizient als Summe der beiden darüberliegenden Binomialkoeffizienten schreiben lässt)

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

Aufgabe 71. Man berechne (i) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$, (ii) $(2^{\sqrt{12}})^{\sqrt{3}}$, (iii) $(10^{\sqrt{10}})^{\sqrt{40}}$

Aufgabe 72. Man berechne:

(i) $\log(e^2)$
(ii) $\log\left(\frac{1}{e}\right)$
(iii) $\log\left(\sqrt[3]{e^2}\right)$
(iv) $\log\left(\frac{\sqrt{e}}{e^2}\right)$
(v) $\log(\sqrt{e})$
(vi) $\log\left(\frac{1}{e^3}\right)$
(vii) $\log\left(\frac{e}{\sqrt[4]{e}}\right)$
(viii) $\log(\log e)$

Aufgabe 73. Seien

$$f(t)=2^{-\frac{t}{3}}, \qquad g(t)=e^{-\frac{t}{\alpha}}.$$

Man finde $\alpha\in\mathbb{R}$ so dass die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ gleich sind für alle $t\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 74. Man berechne:

(i) $e^{2\log(4)}$
(ii) $e^{-\log(4)}$
(iii) $e^{\log(0.2)}$
(iv) $e^{-3\log(0.2)}$
(v) $e^{\log(4)-\log(5)}$
(vi) $e^{2\log(-0.5)}$

Aufgabe 75. Man löse die folgenden Gleichungen nach x auf.

(i) $2^x=11$
(ii) $e^x=\pi$
(iii) $e^{2x-5}=3$
(iv) $10^{\frac{x}{x+1}}=0.8$
(v) $7^{\sqrt{x}}=3$
(vi) $2^x=7^{x-2}$
(vii) $x^{\log_{10}(x)}=10^4$
(viii) $e^x=1+e^{-x}$

Aufgabe 76. Man löse die folgenden Gleichungen nach x auf.

(i) $5^{x-1} + 6^x = 6^{x+1} - 5^x$
(ii) $10^x + 10^{2x} = 600$
(iii) $5^x = 3 \cdot 2^{\sqrt{x}}$
(iv) $9^x - 2 \cdot 3^x - 11 = 0$
(v) $2^x + 3 = 4^x$

Hinweis: (ii) $10^{2x} = (10^x)^2$. Man mache die Substitution $u = 10^x$. Analog für (iv) und (v).

Aufgabe 77.

(i) Man skizziere die Graphen der Funktionen

$$f(x) = e^{-2|x|}, \qquad g(x) = |\log(-x)|.$$

(ii) Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen

$$f(x) + 2 > \frac{5}{2}, \qquad g(x) < 1.$$

Hinweis: Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ sind in (i) gegeben.

Aufgabe 78. Man bestimme die ersten 6 Terme ($n = 1, 2, \ldots, 6$) der Folge, die explizit durch die folgende Formel gegeben ist:

$$a_n = \frac{2n}{3 + 4n - n^2}.$$

Aufgabe 79. Man bestimme die ersten 10 Terme der Fibonacci-Folge, die implizit gegeben ist durch

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Aufgabe 80. Man schreibe die folgenden Folgen in impliziter Form:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad b_n = 2^n + 1.$$

Aufgabe 81. Man schreibe die folgenden Folgen in expliziter Form

(i) $a_1 = 2$, $a_n = 3a_{n-1}$.
(ii) $a_1 = -4$, $a_n = a_{n-1} + 7$

Aufgabe 82. Man bestimme die folgenden Grenzwerte für $n \to \infty$.

(i) $a_n = \dfrac{3 + 2n + 4n^2}{5 + 3n + 6n^2}$, (ii) $a_n = \dfrac{3 + 2n + 4n^2}{5 + 2n}$, (iii) $a_n = \dfrac{3 + 2n + 4n^2}{1 + n^2 + 5n^3}$.

Aufgabe 83. Man bestimme Grenzwerte für $n \to \infty$ der Folge (a_n), wobei

(i) $a_n = 2 + (0.1)^n$
(ii) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$
(iii) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$
(iv) $a_n = \frac{1-n^3}{70-4n^2}$
(v) $a_n = 1 + (-1)^n$
(vi) $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
(vii) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
(viii) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
(ix) $a_n = \frac{1}{(0.9)^n}$
(x) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$
(xi) $a_n = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$

Aufgabe 84. Man schreibe die folgenden Folgen in impliziter Form:

$$a_n = 3n + 39, \qquad b_n = 19(-1)^{n-1}.$$

Aufgabe 85. Man schreibe die folgenden Folgen in expliziter Form

(i) $a_1 = 2$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{3}$

(ii) $a_1 = 17$, $a_n = n a_{n-1}$.

Aufgabe 86. Gegeben ist die rekursive Definition einer Folge

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{4}. \end{cases}$$

(i) Man bestimme die ersten vier Glieder dieser Folge und zeichne sie auf einer Zahlengeraden ein.

(ii) Man bestimme den Grenzwert dieser Folge.

(iii) Man finde eine explizite Beschreibung dieser Folge.

Aufgabe 87. Gegeben ist die rekursive Definition einer Folge

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{n}. \end{cases}$$

(i) Man bestimme die ersten vier Glieder dieser Folge und zeichne sie auf einer Zahlengeraden ein.

(ii) Man bestimme den Grenzwert dieser Folge.

(iii) Man finde eine explizite Beschreibung dieser Folge.

Aufgabe 88. Man untersuche die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an der Stelle $x = 0$ der folgenden Funktionen.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x < 0 \\ 7 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Aufgabe 89. Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + 3x + 2}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

Aufgabe 90. Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

(i) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1 + x^3}{x^2 + 2x^3}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}$

(v) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} e^{-3x} + 2$

Aufgabe 91. Man finde die folgenden Grenzwerte:

(i) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1}$

(ii) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5h + 4} - 2}{h}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$

(iv) $\displaystyle\lim_{t \to -1} \frac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2}$

(v) $\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{5y^3 + 8y^2}{3y^4 - 16y^2}$

(vi) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}{x}$

(vii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (x^2 - 1)(2 - \cos(x))$

(viii) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{-1} - 1}{x - 1}$

(ix) $\displaystyle\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

Aufgabe 92. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (Hinweis: Man ersetze das Argument der Winkelfunktionen mittels Substitution und betrachte den Grezwert für die substitutierte Variable):

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{\sin(3x)}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-x-6}$

Aufgabe 93. Für welche Werte von b ist die folgende Funktion stetig:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{b+1} & x \leq 0, \\ x^2 + b & x > 0. \end{cases}$$

Aufgabe 94. Gegeben ist die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & x \leq 4, \\ A\sin(Bx+C)+D & 4 < x < 6, \\ x + 2 & x \geq 6. \end{cases}$$

(i) Man finde Werte für die Konstanten A, B, C und D, so dass die Funktion $f(x)$ stetig und monoton wachsend ist. Hinweis: Es sind mehrere Antworten möglich, jedoch genügt es eine anzugeben.
(ii) Man skizziere den Graphen der Funktion $f(x)$.

Aufgabe 95. Für welchen Wert von C ist die folgende Funktion stetig:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0, \\ C & x = 0. \end{cases}$$

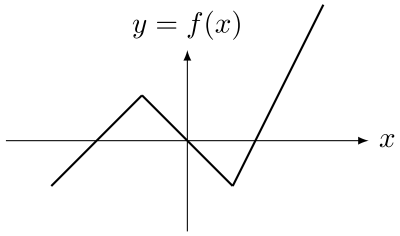
Aufgabe 96. Basierend auf der Definition der Ableitung bestimme man die Ableitung der Funktion

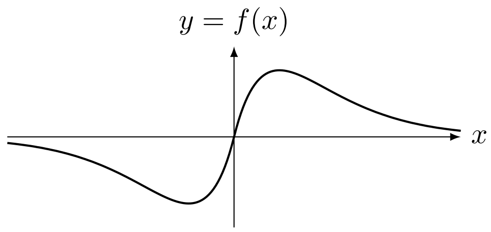
$$f(x) = x/(1-2x).$$

Aufgabe 97. Basierend auf der Definition der Ableitung bestimme man die Ableitung von

$$f(x) = 1/(x-1).$$

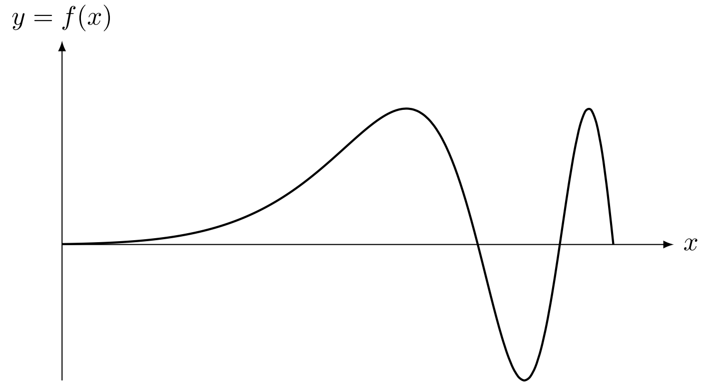
Aufgabe 98. Man skizziere qualitiativ die Ableitung der folgenden Funktionen.





Aufgabe 99.

(i) Man übertrage den folgenden Graphen auf ein Blatt und skizziere dazu die Ableitung (wo möglich).



(ii) Man skizziere den Graphen der Funktion

$$f(x) = -\big|\log(-x+1)\big|$$

und skizziere dazu die Ableitung (wo möglich).

Aufgabe 100. Man leite die folgenden Funktionen nach x ab.

(i) $f(x) = x^{13}$
(ii) $f(x) = 2x^6$
(iii) $f(x) = 2^7$
(iv) $f(x) = x^2 + x^3$
(v) $f(x) = 3x^7 + 4x^2$
(vi) $f(x) = C_1 x^{n_1} + C_2 x^{n_2}$,
mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Aufgabe 101. Sei $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 3x - 7$. Man bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 102. Sei $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$. Gesucht sind die Koordinaten des Scheitelpunktes der dazugehörigen Parabel, ohne die Scheitelpunktsformel oder quadratische Ergänzung zu benutzen.

Aufgabe 103. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{14}{3}.$$

In welchen Punkten besitzt der Graph $y = f(x)$ die selbe Steigung wie die Gerade welche durch den Punkt mit Koordinaten $(7, 14)$ und den Ursprung verläuft?

Aufgabe 104. Man leite die folgenden Funktionen nach x ab.

(i) $f(x) = 5x^2 + 10x - 11$
(ii) $f(x) = \frac{1}{1000}x^{1000}$
(iii) $f(x) = x$
(iv) $f(x) = 1$
(v) $f(x) = (x+2)^2$
(vi) $f(x) = y^2 x^3$
(vii) $f(x) = \frac{1}{7}(x^7 + 2x^6)$

Aufgabe 105. Sei

$$\frac{df}{dx}(x) = x^2 + 2x.$$

(i) Man bestimme die Form von $f(x)$.
(ii) Es sei zusätzlich gefordert dass $f(1) = 2$. Man bestimme $f(x)$.

Aufgabe 106. Man leite die folgende Funktion nach x ab:
$$f(x) = 4x^7 + 2\sqrt{x} + 8(\sin(x) + \cos(x)) + 13e^x - 8.$$

Aufgabe 107. Man leite nach x ab:

(i) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$, (ii) $f(x) = e^x \sin(x)$, (iii) $f(x) = \sqrt{x}\cos(x)$.

Aufgabe 108. Man leite eine Formel für die Ableitung von $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ her.

Aufgabe 109. Man leite nach x ab. $f(x) = \dots$

(i) $\sin(x)$
(ii) $\sin(2x)$
(iii) $\sin(x^2)$
(iv) $3\sin(x^2)$
(v) $3\sin(x^2+7)$
(vi) $3\sin(x^2+7x)$
(vii) $3\sin(x^2+7x+4)$
(viii) $\sin(\cos(x))$
(ix) $\sin(\cos(2x))$
(x) $\sin(\cos(x^2))$

Aufgabe 110. Man leite nach x ab:
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \log(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$$

Aufgabe 111. Man leite nach x ab. $f(x) = \dots$

(i) $\frac{1}{x}$
(ii) $\frac{1}{2x}$
(iii) $\frac{1}{x^2}$
(iv) $\frac{1}{3x^2}$
(v) $\frac{1}{3x^2+5}$
(vi) $\frac{1}{3x^2+5x}$
(vii) $\frac{1}{3x^2+5x+3}$
(viii) $\frac{1}{\sin(x)}$
(ix) $\frac{1}{\sin(2x)}$
(x) $\frac{1}{\sin(x^2)}$

Aufgabe 112. Man leite nach x ab. $f(x) = \dots$

(i) $\sin(\frac{1}{x})$
(ii) $\sqrt{\frac{1}{x}}$
(iii) $\frac{1}{\frac{1}{x}+1}$
(iv) $e^{\frac{1}{x}}$

Aufgabe 113. Man leite nach x ab. $f(x) = \dots$

(i) $x^2\sin(x)$
(ii) $\frac{x^2}{\sin(x)}$
(iii) $(x-1)e^x$
(iv) $\frac{x-1}{e^x}$

Aufgabe 114. Man leite die folgenden Funktionen ab.

(i) $f(x) = (3-8x)^{11}$
(ii) $f(z) = \sqrt[7]{9z^3}$

Aufgabe 115. Man leite die folgenden Funktionen ab.

(i) $f(x) = (6x^2+7x)^4$
(ii) $g(t) = (4t^2-3t+2)^{-2}$
(iii) $f(z) = \sqrt[3]{1-8z}$
(iv) $f(x) = 2\sin(3x+\tan(x))$
(v) $h(u) = \tan(4+10u)$
(vi) $g(t) = 5 + e^{4t+t^7}$
(vii) $g(x) = e^{1-\cos(x)}$
(viii) $H(z) = 2^{1-6z}$
(ix) $F(y) = \log(1-5y^2+y^3)$
(x) $V(x) = \log(\sin(x) - \cot(x))$

Hinweis: $\cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$

Aufgabe 116. Man leite nach x ab:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad g(x) = a^x, \qquad h(x) = x^x.$$

Aufgabe 117. Man leite ab.

(i) $k(z) = \log(z - \sqrt{z^2+1})$
(ii) $f(x) = \log(\log(x))$
(iii) $h(t) = \log(\tan(t))$
(iv) $g(u) = (u\log(u))^{10}$
(v) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3\log(x)}}$

Aufgabe 118. Sei $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x - 4$ und sei $h(x)$ die inverse Funktion von $f(x)$. Man bestimme $\frac{dh}{dx}(-14)$. Hinweis: $f(-2) = -14$.

Aufgabe 119. Sei $h(x)$ die inverse Funktion von $g(x)$. In der folgenden Tabelle sind einige Werte von $g(x)$, $h(x)$ und $\frac{dg}{dx}(x)$ aufgelistet (Erinnerung: $g'(x) = \frac{dg}{dx}(x)$):

x	$g(x)$	$h(x)$	$g'(x)$
3	5	4	$-1/4$
4	3	1	$1/2$

Man bestimme $\dfrac{dh}{dx}(3)$.

Aufgabe 120. Man leite die folgenden Funktionen nach ihrem Argument ab:

(i) $f(x) = x^2 - \cos(x) + x^{\frac{1}{3}} + \pi$
(ii) $g(s) = \cos\left(\frac{1}{s}\right)$
(iii) $h(t) = t^{1-e}$
(iv) $k(u) = \dfrac{1}{(3u^2-2u+1)^{100}}$
(v) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
(vi) $g(s) = \log\Big(2s + \log(3s)\Big)$
(vii) $h(t) = \left(\dfrac{1+\sin(3t)}{3-2t}\right)^{-1}$
(viii) $k(u) = 12^{\sqrt{u}}$

Aufgabe 121. Für die Funktionen f und g und ihre Ableitungen nach x seien die folgenden Werte bei $x = 0$ und $x = 1$ gegeben:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	$\frac{1}{3}$
1	3	-4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$

Man finde die Ableitungen nach x der folgenden Funktionen beim gegebenen x-Wert:

(i) $5f(x) + g(x), \quad x = 1,$
(ii) $f(x)(g(x))^3, \quad x = 0,$
(iii) $f(g(x)), \quad x = 0,$
(iv) $(x^{11} + f(x))^{-2}, \quad x = 1,$
(v) $f(x + g(x)), \quad x = 0.$

Aufgabe 122. Man bestimme die Ableitung der Funktion $\arccos(x)$. Man vereinfache den erhaltenen Ausdruck mit Hilfe der Pythagorasidentität der Trigonometrie.

Aufgabe 123. Man bestimme die ersten 6 Ableitungen der Funktion

$$f(x) = x^4 - 9x^2 + 14x - 11.$$

Aufgabe 124. Sei $f(x) = (3x+2)^{5/3}$. Man bestimme $\frac{d^3 f}{dx^3}(2)$.

Aufgabe 125. Für $n \in \{2, 3, 4, 19\}$ bestimme man

(i) $\dfrac{d^n}{dx^n} \sin(x)$, (ii) $\dfrac{d^n}{dx^n} \cos(x)$, (iii) $\dfrac{d^n}{dx^n} e^x$, (iv) $\dfrac{d^n}{dx^n} e^{2x}$, (v) $\dfrac{d^n}{dx^n} \left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Lösung 1. Die Teilmengen von $\{a, b, c, d\}$ sind $\{\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Lösung 2.

(i) wahr
(ii) wahr
(iii) falsch
(iv) wahr

Lösung 3.

(i) $\{\}$
(ii) A
(iii) $A \cap B$

Lösung 4.

(i) $I \cap J = (5, 7)$, $I \cup J = (2, 9)$, $I \backslash J = (2, 5]$, $J \backslash I = [7, 9)$
(ii) $I \cap J = (-12, -10)$, $I \cup J = (-\infty, 25)$, $I \backslash J = (-\infty, -12]$, $J \backslash I = [-10, 25)$
(iii) $I \cap J = \{10\}$, $I \cup J = (-10, 20)$, $I \backslash J = (-10, 10)$, $J \backslash I = (10, 20)$
(iv) $I \cap J = (0.3, 1/3)$, $I \cup J = [-0.3, 7/3]$, $I \backslash J = [-0.3, 0.3]$, $J \backslash I = [1/3, 7/3]$

Lösung 5.

(i) 3
(ii) -1

Lösung 6. Der Wert wird nicht überschritten.

Lösung 7.

(i) $\mathbb{L} = (-\infty, 0]$
(ii) $\mathbb{L} = [0, \infty)$
(iii) $\mathbb{L} = \{0\}$
(iv) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
(v) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
(vi) $\mathbb{L} = (-3, 3)$

Lösung 8.

(i) $\mathbb{L} = (-\infty, 3)$
(ii) $\mathbb{L} = (0, 3)$
(iii) $\mathbb{L} = (-\infty, 3] \cup [5, \infty)$

Lösung 9.

(i) $y = \pm 3$
(ii) $t \in \{-1/2, -9/2\}$
(iii) $s \in \{7/6, 25/6\}$

Lösung 10.

(i) $\mathbb{L} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
(ii) $\mathbb{L} = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$
(iii) $\mathbb{L} = [0, 10]$

Lösung 11. Die erste Gleichung ist $|x - (-3)| \leq 2$. Somit sind dies alle x welche von -3 einen Abstand kleiner gleich 2 besitzen. Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist also $\mathbb{L}_1 = [-5, -1]$. Aus der zweiten Gleichung folgt $x \geq 4$ oder $x \leq -4$. Also ist die Lösungsmenge der zweiten Gleichung $\mathbb{L}_2 = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = [-5, -4].$$

Lösung 12.

(i) $D = (-\infty, \infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [1, \infty)$
(ii) $D = [-2, \infty)$, $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$
(iii) $D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
(iv) $D = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
(v) $D = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$
(vi) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathrm{Im}(h) = \{-1, 1\}$

Lösung 13.

(i) $x_\pm = \pm 3$
(ii) $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
(iii) $x = 1$

Lösung 14.

(i) Gerade
(ii) Ungerade
(iii) Ungerade
(iv) Gerade
(v) Gerade
(vi) Gerade
(vii) Weder noch
(viii) Gerade

Lösung 15.

(i) $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$
(ii) $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$, wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen verwenden haben dass g ungerade ist und für das dritte Gleichheitszeichen dass f gerade ist.

Lösung 16.

(i) Wir müssen zeigen dass f_1 ungerade und f_2 gerade ist, i.e. wir müssen zeigen dass gilt $f_1(-x) = -f_1(x)$ und $f_2(-x) = f_2(x)$. Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $f_1(x)$ ergibt

$$f_1(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -f_1(x).$$

Somit ist $f_1(x)$ eine ungerade Funktion. Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $f_2(x)$ ergibt

$$f_2(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = f_2(x).$$

Somit ist $f_2(x)$ eine gerade Funktion.

(ii) Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $g_1(x)$ ergibt

$$g_1(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -g_1(x).$$

Somit ist $g_1(x)$ eine ungerade Funktion. Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $g_2(x)$ ergibt

$$g_2(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g_2(x).$$

Somit ist $g_2(x)$ eine gerade Funktion.

Lösung 17.

(i) $p = \pi$
(ii) $p = 4\pi$
(iii) $p = \frac{2\pi}{\omega}$

Lösung 18.

(i) $a(x) = (x^2-1)\cdot\frac{x}{x^2+1} + x^3$

(ii) $b(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 - 1 + x^3$

(iii) $c(x) = \frac{x^2-1}{(x^2-1)^2+1}$

(iv) $d(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

(v) $e(x) = (x^2-1)^6$

Lösung 19.

(i) $(g\cdot f)(x) = g(x)\cdot f(x) = (x^3+x+1)\frac{1}{x-1}$. $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

(ii) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(x^3+x+1)-1} = \frac{1}{x(x^2+1)}$. $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Lösung 20.

$g(x)$	$f(x)$	$(f\circ g)(x)$
$x-7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
$x+2$	$3x$	$3x+6$
x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

Lösung 21.

(i) $f(g(0)) = 3$

(ii) $f(f(2)) = 2$

(iii) $g(f(3)) = 1$

(iv) $g(f(0)) = 1$

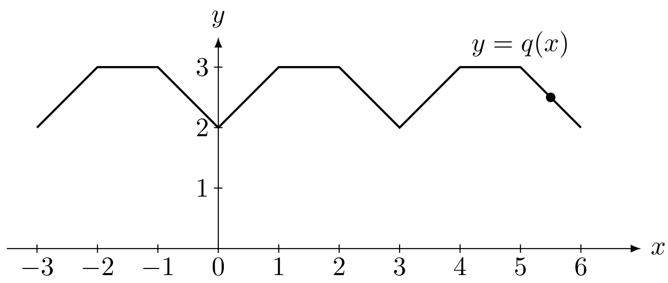
(v) $g(g(-1)) = 0$

(vi) $f(g(1/2)) = 2.5$

Lösung 22.

(i) $g(x)$ und $h(x)$ besitzen die Periode $p = 4$. $k(x)$ besitzt die Periode $p = 8$.

(ii)



Wir haben $q(11/2) = 5/2$ (siehe Punkt in der obigen Figur).

Lösung 23.

(i) injektiv, nicht surjektiv, $\mathrm{Im}(f) = [0,25]$

(ii) injektiv, surjektiv, somit bijektiv $\mathrm{Im}(f) = [0,\infty)$

(iii) nicht injektiv, nicht surjektiv, $\mathrm{Im}(f) = [0,25]$

(iv) nicht injektiv, surjektiv, $\mathrm{Im}(f) = [0,25]$

(v) injektiv, surjektiv, somit bijektiv, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

(vi) nicht injektiv, surjektiv, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Lösung 24.

(i) Nicht injektiv.

(ii) Nicht injektiv.

Lösung 25.

(i) $f^{-1}(x) = \frac{1}{29}(3-x)$, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3-29x) = \frac{3-(3-29x)}{29} = x$

(ii) $f^{-1}(x) = x^2 + 3,\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt{x-3}) = (\sqrt{x-3})^2 + 3 = x$

(iii) $f^{-1}(x) = \frac{4+5x}{2x-1},\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+4}{2x-5}\right) = \frac{4+5\left(\frac{x+4}{2x-5}\right)}{2\left(\frac{x+4}{2x-5}\right)-1} = x$

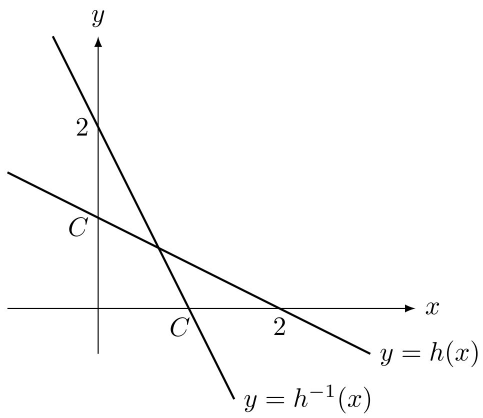
(iv) $f^{-1}(x) = (x-6)^{\frac{1}{3}},\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3+6) = ((x^3+6-6)^{\frac{1}{3}}) = x$

(v) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x},\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = x$

Lösung 26.

(i) $f(x)$ ist weder noch, $g(x)$ ist gerade.

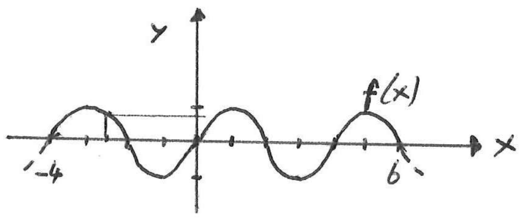
(ii) (a) $h^{-1}(x) = -\frac{2}{C}x + 2.$



(iii) $k = -C$

(iv) $k = 2$

Lösung 27.



$f(-2.5) = 3/4$

Lösung 28.

(i) $D = [0, 2]$, $B = [2, 3]$

(ii) $D = [0, 2]$, $B = [-1, 0]$

(iii) $D = [0, 2]$, $B = [0, 2]$

(iv) $D = [0, 2]$, $B = [-1, 0]$

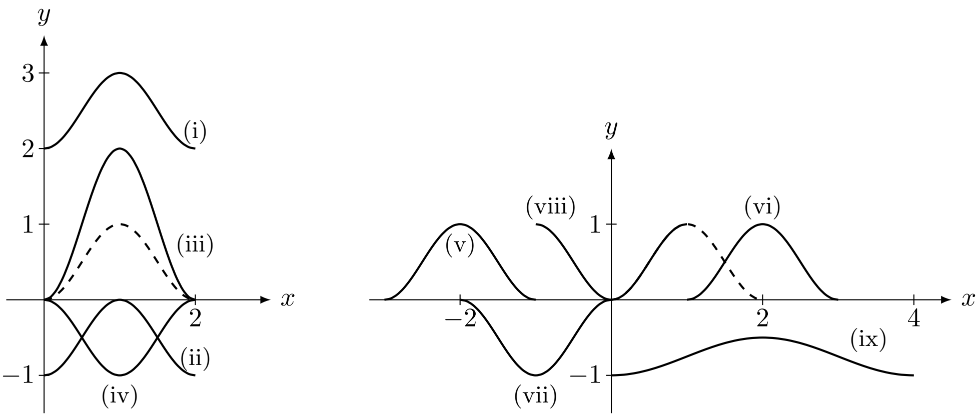
(v) $D = [-3, -1]$, $B = [0, 1]$

(vi) $D = [1, 3]$, $B = [0, 1]$

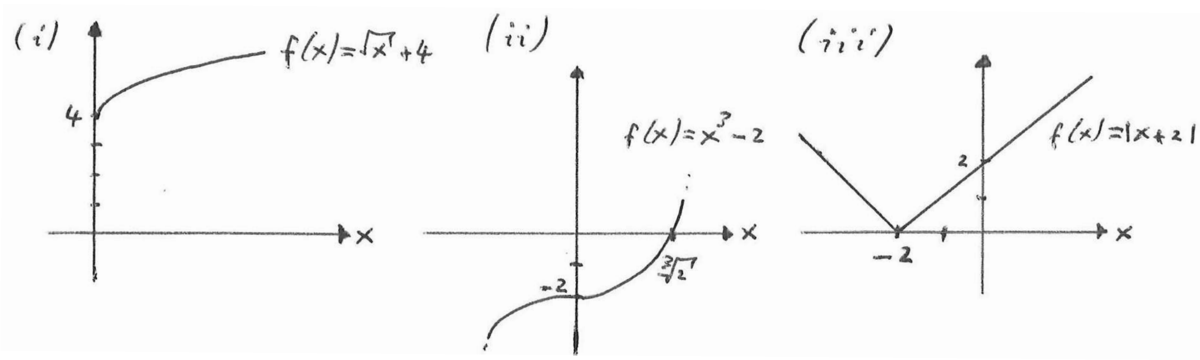
(vii) $D = [-2, 0]$, $B = [-1, 0]$

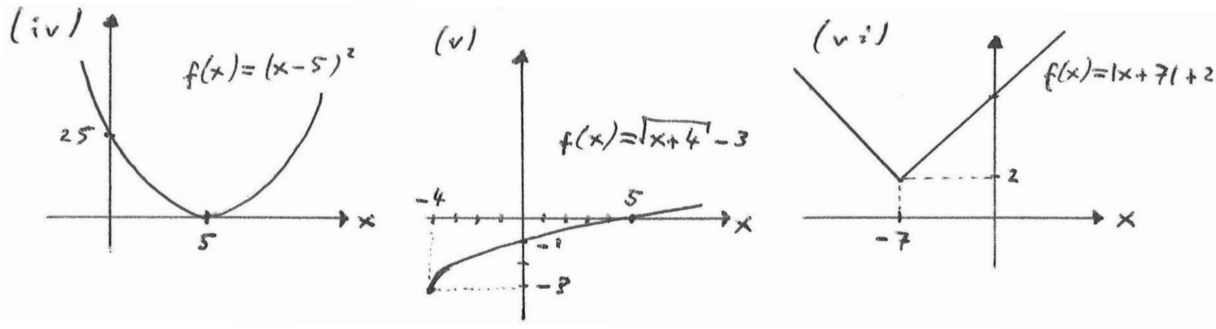
(viii) $D = [-1, 1]$, $B = [0, 1]$

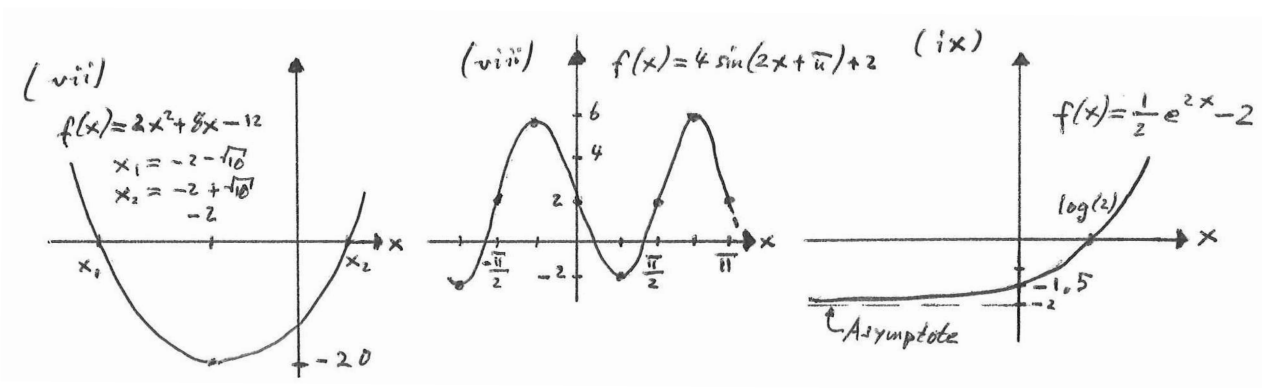
(ix) $D = [0, 4]$, $B = [-1, -0.5]$


y
3
2
1
−1
x
2
(i)
(ii)
(iii)
(iv)
(v)
(vi)
(vii)
(viii)
(ix)
−2
4

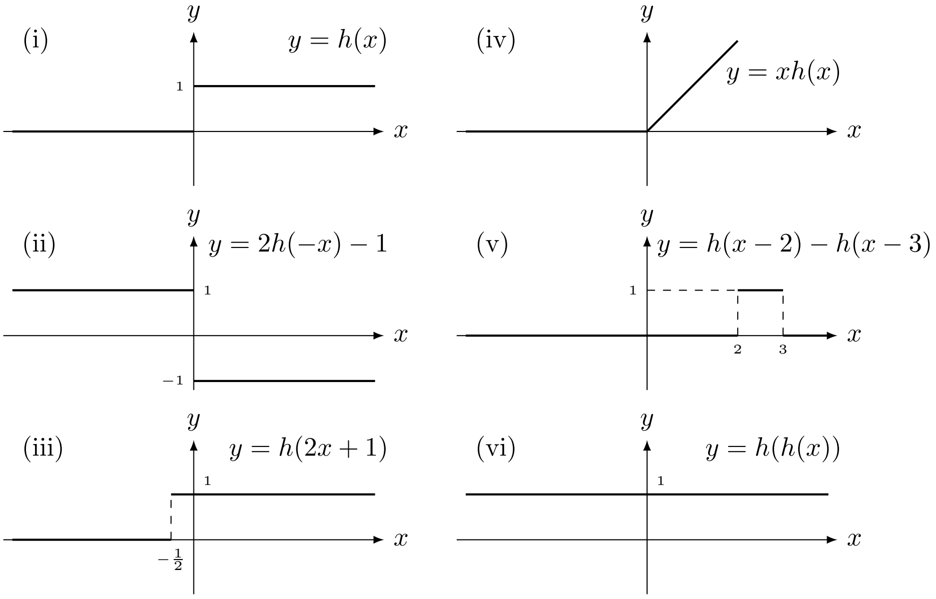
Lösung 29.


(i)
f(x) = √x + 4
4
x
(ii)
f(x) = x³ − 2
−2
∛2
x
(iii)
f(x) = |x + 2|
2
−2
x


(iv)
f(x) = (x − 5)²
25
5
x
(v)
f(x) = √(x+4) − 3
−4
5
−1
−3
x
(vi)
f(x) = |x + 7| + 2
2
−7
x


(vii)
f(x) = 2x² + 8x − 12
x₁ = −2 − √10
x₂ = −2 + √10
−2
x₁
x₂
−20
x
(viii)
f(x) = 4 sin(2x + π) + 2
6
4
2
−2
−π/2
π/2
π
x
(ix)
f(x) = ½ e^{2x} − 2
log(2)
−1,5
−2
Asymptote
x

Lösung 30.



Lösung 31.

(i) Ausmultiplizieren ergibt $f(x) = -2x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 18x$. Somit ist der Grad $n = 4$ und die Koeffizienten sind $a_4 = -2$, $a_3 = -10$, $a_2 = -6$, $a_1 = 18$, $a_0 = 0$.

(ii) $(f + g)(x) = x^2 + 5x + 1$, somit ist der Grad von $(f + g)(x)$ gleich 2.
$(fg)(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x$, somit ist der Grad von $(fg)(x)$ gleich 3.
$f(g(x)) = 4x^2 + 10x + 4$, somit ist der Grad von $f(g(x))$ gleich 2.

(iii) $\max\{m, n\}$, $m + n$, mn (wobei mit $\max\{\ldots\}$ das grösste Element in der Menge gemeint ist.)

Lösung 32.

(i) h: $y = \frac{3}{5}x - \frac{17}{5}$

(ii) i: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{37}{10}$

Lösung 33.

(i) Beide Funktionen sind gerade.

(ii) Die Punkte ergeben $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. Damit nun $h(x) + k$ eine ungerade Funktion ist, muss gelten:

$$h(-x) + k = -(h(x) + k),$$

i.e.

$$\frac{1}{2}x + 2 + k = \frac{1}{2}x - 2 - k.$$

Daraus folgt $k = -2$. Ohne Rechnung: Die Funktion kann nur ungerade sein wenn sie durch den Ursprung verläuft. Somit muss k den y-Achsenabschnitt kompensieren, i.e. $k = -2$.

Lösung 34.

(i) $(f + g)(x) = (M + m)x + B + b$, die Steigung ist somit $M + m$ und der y-Achsenabschnitt ist $B + b$.

(ii) $(f \circ g)(x) = mMx + mB + b$, die Steigung ist somit mM und der y-Achsenabschnitt ist $mB + b$.

(iii) $f(\mu x + \nu y) = m(\mu x + \nu y) = \mu m x + \nu m y = \mu f(x) + \nu f(y)$.

Lösung 35. Setzt man den Ausdruck $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ in die Funktionsgleichung $y = mx + b$ ein, so erhält man

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + b.$$

Umstellen nach b und einsetzen der Koordinaten (x_1, y_1) für x, y liefert

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1.$$

Einsetzen in die Gleichung $y = mx + b$ liefert

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \right).$$

Diese Form nennt man auch *Zwei-Punkte-Form*. Falls im zweiten Schritt die Koordinaten (x_2, y_2) gewählt wurden ergibt sich die Gleichung

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \left(y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 \right).$$

Die beiden Gleichungen unterscheiden sich im Ausdruck für b (die geklammerten Terme). Jedoch sind diese Ausdrücke gleich. Dies zeigen wir indem wir die Terme gleich setzen

$$y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2.$$

und die Brüche auf die linke Seite bringen

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = y_2 - y_1,$$

i.e.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_2 - x_1) = y_2 - y_1.$$

Der Faktor $x_2 - x_1$ kürzt sich, die Terme sind somit gleich.

Lösung 36. $C < \frac{25}{8}$

Lösung 37.

(i) $x_\pm = -1 \pm 2\sqrt{2}$
(ii) $q_\pm = \frac{5 \pm j\sqrt{107}}{6}$
(iii) $t_+ = \frac{2}{7}$, $t_- = -3$
(iv) $y_\pm = 2 \pm \sqrt{6}$
(v) $x_+ = 0$, $x_- = 16$

Lösung 38. Wir schreiben den Ausdruck mit Linearfaktoren hin, verwenden die Lösungsformel und multiplizieren aus:

$$\begin{aligned}
a(x - x_1)(x - x_2) &= a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \\
&= a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \\
&= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right) \\
&= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\
&= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) \\
&= ax^2 + bx + c,
\end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile die dritte binomische Formel $(s-t)(s+t) = s^2 - t^2$ verwendet haben.

Lösung 39.

(i) $x^2 + 8x - 9 = 0$
(ii) $x^2 + 9x + 16 = 0$
(iii) $x^2 - 10x + 34 = 0$
(iv) $49x^2 + 126x + 81 = 0$

Lösung 40.

(i) $y = (x+2)^2 + 1$
(ii) $y = 2\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{31}{32}$
(iii) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$

Lösung 41. Wir ergänzen quadratisch:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c. \end{aligned}$$

Somit sind die Koordinaten des Scheitelpunktes gegeben als $(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.

Lösung 42.

(i) Wir betrachten die Funktionsgleichung $y = x^2 - 7x + 12$ und ergänzen quadratisch.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 7x + 12 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7^2}{2^2} + 12 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{48}{4} \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Somit ist die Scheitelpunktsform

$$y + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$$

und die Koordinaten des Scheitelpunktes sind $S(7/2, -1/4)$.

(ii) Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$x_\pm = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}.$$

Somit sind die Nullstellen von $f(x)$ bei $x = 3$ und bei $x = 4$ und die Produktform der Funktionsgleichung ist

$$y = (x-3)(x-4).$$

(iii) Die Parabel zu $f(x)$ ist nach oben geöffnet und schneidet bei $x = 3$ und $x = 4$ die x-Achse. Sie verläuft also im Intervall $(3, 4)$ unterhalb der x-Achse, was negativen Funktionswerten entspricht. Somit besitzt die Ungleichung $f(x) \geq 0$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \mathbb{R} \backslash (3, 4).$$

Lösung 43. $2x^3 + 8x^2 + 5x + 9 + \frac{1}{x-1}$.

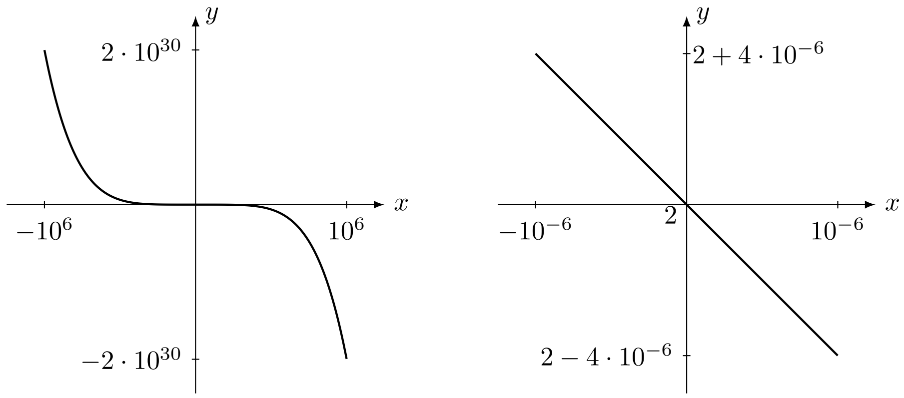
Lösung 44. $r = 5$

Lösung 45. Wir haben $f(x) = x(2x^2 - 2x - 4) = 0$. Somit ist $x = 0$ eine Nullstelle und die weiteren Nullstellen werden durch das Lösen der Gleichung $2x^2 - 2x - 4 = 0$ gefunden. Es folgt $f(x) = 2x(x-2)(x+1)$.

Lösung 46. $f(x) = (x-2)(x-1)^3$.

Lösung 47.

(i)



(ii) $r = f(1) = -2 + 8 - 17 + 31 - 4 + 2 = 18$

Lösung 48. $f(x) = \frac{4x^4 - 2x + 5}{x^2 - 3x - 1} = 4x^2 + 12x + 40 + \frac{130x + 45}{x^2 - 3x - 1}$

Lösung 49.

(i) Die Definitionslücken sind die Nullstellen der ungekürzten Funktion. Somit besitzt $f(x)$ bei $x = -1$ eine Definitionslücke. Nun prüfen wir ob Kürzen möglich ist indem wir den Zähler als Produkt von Linearfaktoren schreiben. Dazu benötigen wir die Nullstellen von $g(x)$. Eine davon ist gegeben durch die Angabe $g(3) = 0$, i.e. bei $x = 3$. Abspalten der Nullstelle mittels Polynomdivision ergibt

$$(-x^3 - x^2 + 8x + 12) : (x - 3) = -x^2 - 4x - 4.$$

Die weiteren Nullstellen findet man durch die Gleichung

$$-x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt

$$x_\pm = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{-2} = -2,$$

wobei es sich um eine doppelte Nullstelle handelt, da die Diskriminante verschwindet. Somit gilt $h(x) = (-x^3 - x^2 + 8x + 12) = -(x-3)(x+2)^2$ und

$$f(x) = -\frac{(x-3)(x+2)^2}{x+1}.$$

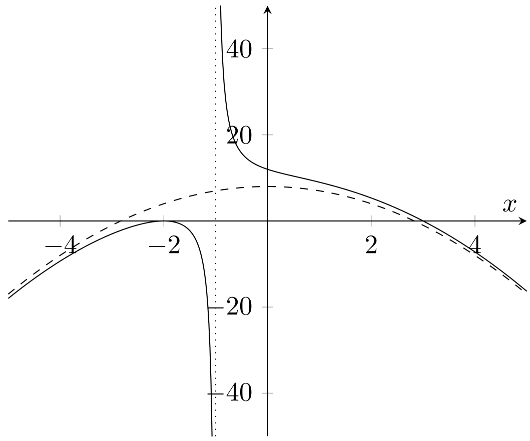
Wir sehen dass nicht gekürzt werden kann und die Nullstellen von $f(x)$ sind bei $x = 3$ und bei $x = -2$ (doppelt). Die Polstellen sind die Nullstellen des Nenners der gekürzten Funktion, somit hat $f(x)$ eine Polstelle bei $x = -1$.

(ii) Polynomdivision ergibt

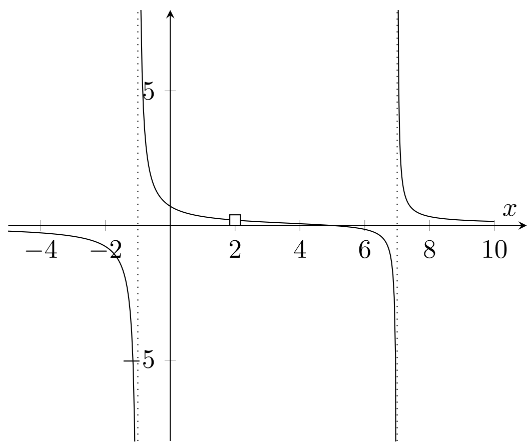
$$(-x^3 - x^2 + 8x + 12) : (x + 1) = -x^2 + 8 + \frac{4}{x+1}.$$

Somit ist die Asymptote $y = -x^2 + 8$.

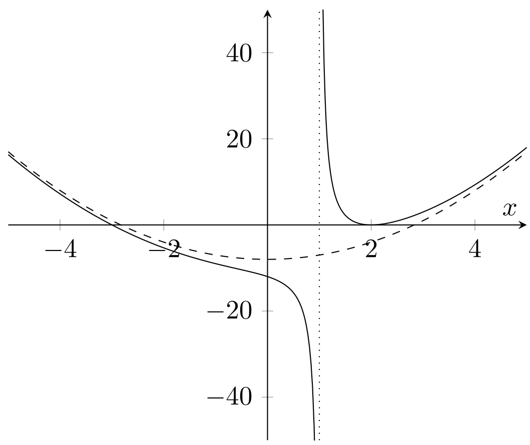
(iii)



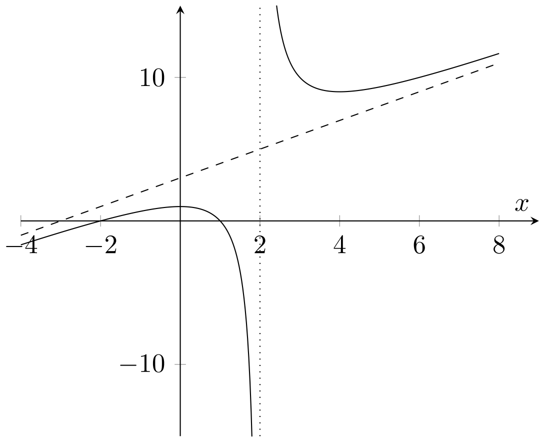
Lösung 50. $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 2, 7\}$, Nullstellen sind $x = 5$. Polstellen sind $x = -1$ und $x = 7$. Der Graph der Funktion ist (mit dem weissen Viereck wird die Definitionslücke angedeutet):



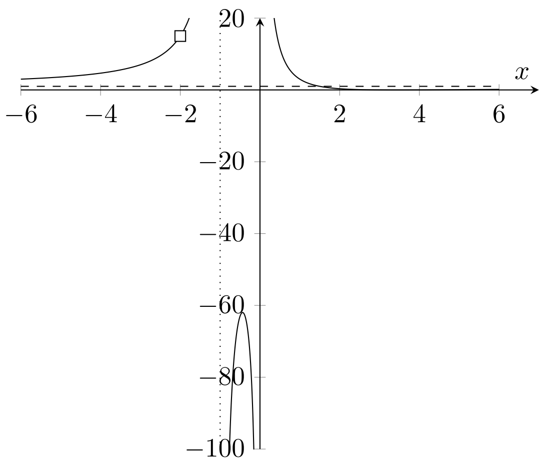
Lösung 51. $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, Nullstellen sind bei $x = 2$ (doppelt) und $x = -3$. Polstelle ist bei $x = 1$, Asymptoten gegeben durch die Funktion $y = x^2 - 8$.

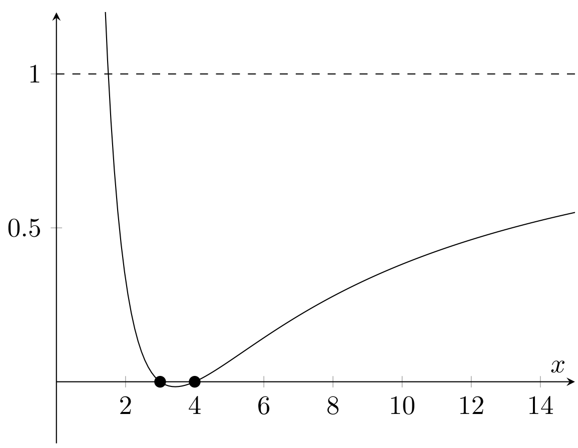


Lösung 52. Nullstellen bei $x = -2$ und $x = 1$, Polstelle bei $x = 2$ und Asymptote gegeben durch $y = x + 3$. Graph:

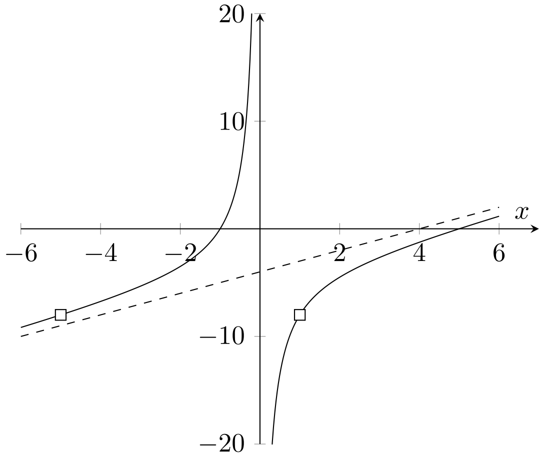


Lösung 53. $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2\}$, Nullstellen sind bei $x = 4$ und $x = 3$, Pole sind bei $x = 0$ und $x = -1$. Die Asymptote ist $y = 1$. Graph (die zweite Abbildung zeigt den Ausschnitt für $x \in (0, 15)$ um die Lage der Nullstellen (schwarze Punkte) zu verdeutlichen)





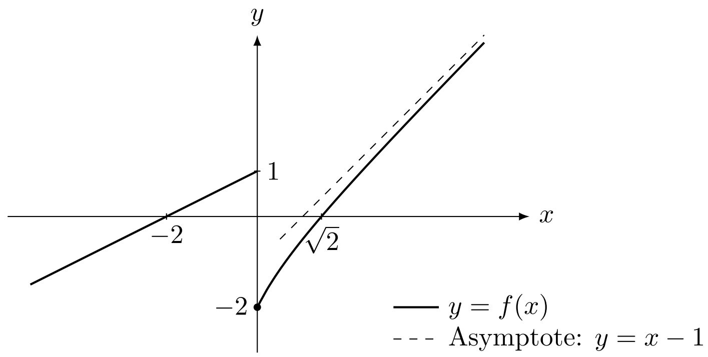
Lösung 54. Nullstellen sind bei $x = 5$ und $x = -1$. Pol bei $x = 0$. Asymptote ist $y = x - 4$. Graph:



Lösung 55.

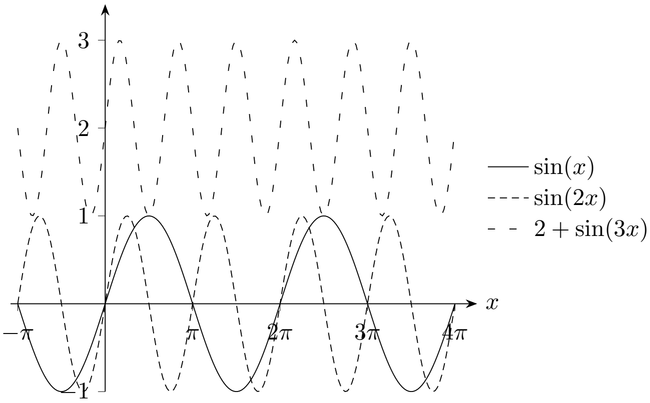
(i) $f(1) = -1/2$, $(f(1))^2 = 1/4$, $f(f(1)) = f(-1/2) = 3/4$.

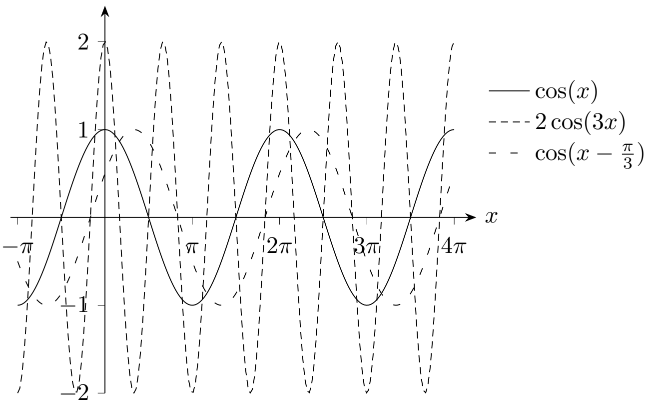
(ii) Die Funktion $\frac{x^2-2}{x+1} = \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x+1} = x - 1 - \frac{1}{x+1}$ besitzt bei $x = -1$ eine Polstelle, bei $x = \pm\sqrt{2}$ eine Nullstelle und die Asymptote ist $y = x - 1$.

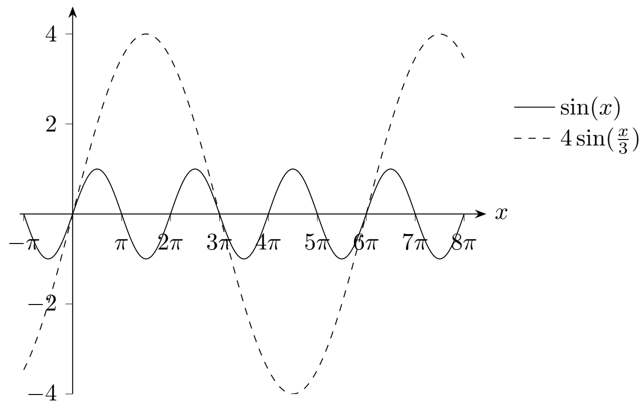


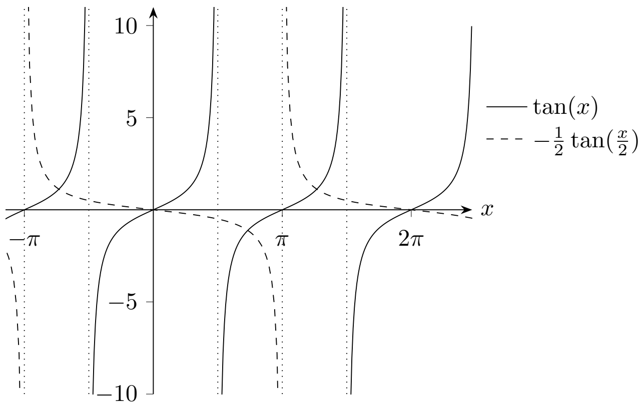
(iii) $f(x)$ ist nicht injektiv. Begründung durch Test mit horizontaler Geraden am Graphen: Wird die horizontale Gerade im Bereich $y \in (-2, 1)$ gelegt, so ergeben sich zwei Schnittpunkte. Beispielsweise die Gerade $y = 0$ schneidet den Graphen bei $x = -2$ und $x = \sqrt{2}$, i.e. $f(-2) = f(\sqrt{2}) = 0$.

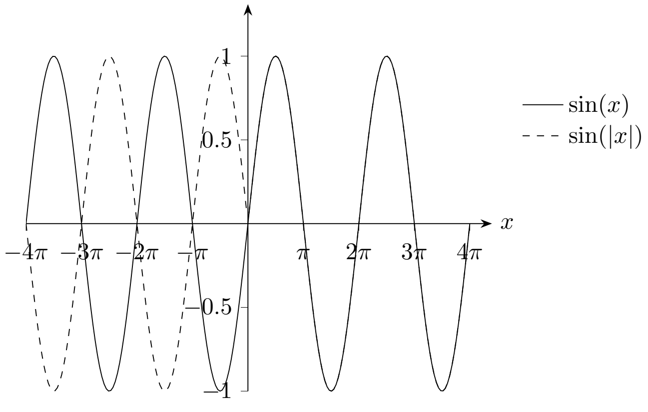
Lösung 56.

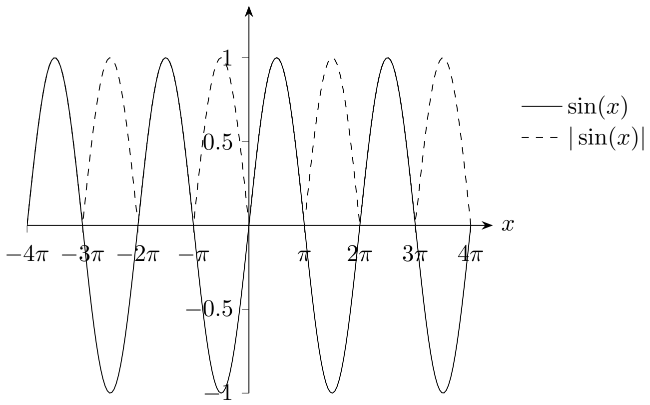



2
1
−1
−2
−π
π
2π
3π
4π
x
cos(x)
2 cos(3x)
cos(x − π/3)


4
2
−2
−4
−π
π
2π
3π
4π
5π
6π
7π
8π
x
sin(x)
4 sin(x/3)


10
5
−5
−10
−π
π
2π
x
tan(x)
−1/2 tan(x/2)


1
0.5
−0.5
−1
−4π
−3π
−2π
−π
π
2π
3π
4π
x
sin(x)
sin(|x|)



Lösung 57. (i)(c), (ii)(d), (iii)(a), (iv)(b)

Lösung 58.

(i) π, ungerade

(ii) $\frac{2\pi}{3}$, weder gerade noch ungerade

(iii) π, ungerade

(iv) $\frac{2\pi}{3}$, ungerade

(v) $\frac{2\pi}{3}$, ungerade

(vi) π, gerade

Lösung 59.

(i) Der Definitionsbereich der Funktion $\sin^{-1} = \arcsin$ ist $[-1, 1]$. Für diese x gilt die verlangte Bedingung.

(ii) Das Bild der Funktion $\cos^{-1} = \arccos$ ist $[0, \pi]$. Für diese x gilt die verlangte Bedingung.

Lösung 60. (i) $\frac{\pi}{6}$, (ii) $-\frac{\pi}{3}$, (iii) 0.

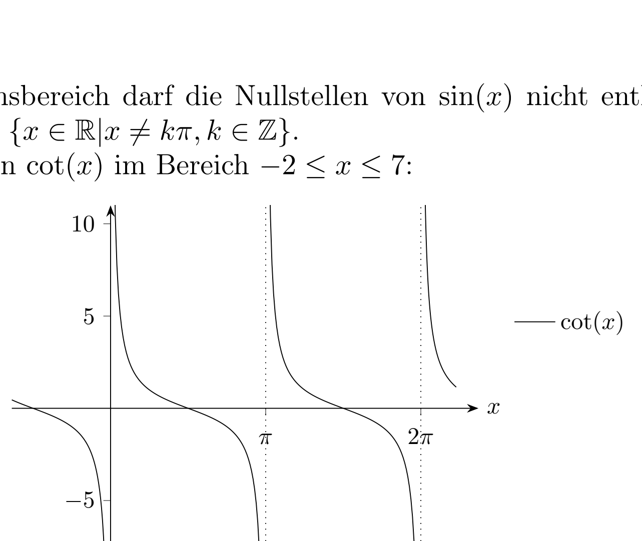
Lösung 61. (i) $\frac{\pi}{4}$, (ii) $\frac{\pi}{4}$, (iii) $\frac{\pi}{2}$.

Lösung 62. (i) $\frac{\pi}{4}$, (ii) $\frac{\pi}{3}$, (iii) $\frac{\pi}{4}$.

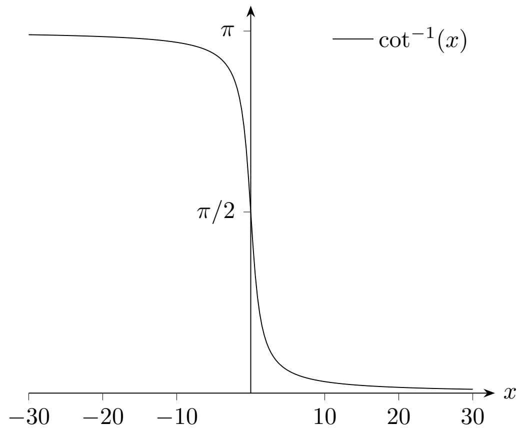
Lösung 63.

(i) Der Definitionsbereich darf die Nullstellen von $\sin(x)$ nicht enthalten und ist somit $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) Der Graph von $\cot(x)$ im Bereich $-2 \leq x \leq 7$:



(iii) Der Definitionsbereich der Funktion f muss eingeschränkt werden. Eine mögliche Einschränkung ist auf das Intervall $(0, \pi)$. Die resultierende inverse Funktion f^{-1} hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und das Bild $(0, \pi)$. Der Graph davon ist



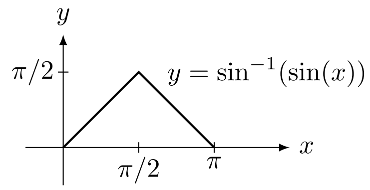
Der Wert von $x = f^{-1}(-\sqrt{3})$ ist bestimmt durch die Bedingung $\cot(x) = -\sqrt{3}$ und $0 < x < \pi$. Man erhält $x = \frac{5\pi}{6}$. Eine andere, oft verwendete Einschränkung des Definitionsbereichs von f ist auf das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$. In diesem Fall ergibt sich $x = -\frac{\pi}{6}$.

Lösung 64.

(i) $f(\pi/4) = f(3\pi/4) = \pi/4$

(ii) $D = \mathbb{R}$

(iii)



Lösung 65.

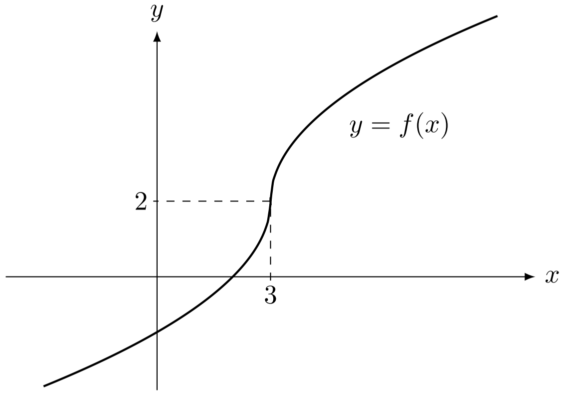
(i) $f(x) = \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

(ii) $f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} t + \pi\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}$

Lösung 66.

(i) Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$. Das Bild ist $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

(ii)



(iii) Die Funktion ist injektiv und surjektiv, somit bijektiv.

(iv) Die inverse Funktion ist gegeben durch

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 3 & x < 2, \\ \frac{1}{4}(x-2)^2 + 3 & x \geq 2. \end{cases}$$

Lösung 67. (i) $\sum_{k=1}^{20} \frac{k}{2^k}$, (ii) $\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$, (iii) $\sum_{k=1}^{101} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Lösung 68. (i) $\sum_{k=7}^{17} 2^k$, (ii) $\sum_{k=0}^{10} 2^{k+7}$, (iii) $\sum_{j=40}^{50} 2^{j-33}$

Lösung 69. Für (i), und (ii) setzt man in die Definitionsgleichung ein.
(iii)

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)1} = n.$$

(iv)

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!(n-1)!} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \binom{n}{1} = n,$$

für die letzte Gleichung siehe (iii).

Lösung 70. Wir beginnen mit der rechten Seite der Gleichung und formen um.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= (n-1)!\left(\frac{1}{(n-1-k)!k!} + \frac{1}{(n-k)!(k-1)!}\right) \\
&= (n-1)!\left(\frac{(n-k)}{(n-1-k)!(n-k)k!} + \frac{k}{(n-k)!(k-1)!k}\right) \\
&= (n-1)!\left(\frac{n-k}{(n-k)!k!} + \frac{k}{(n-k)!k!}\right) \\
&= (n-1)!\frac{(n-k)+k}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Lösung 71. (i) 25, (ii) 64, (iii) 10^{20}

Lösung 72.

(i) 2
(ii) -1
(iii) $2/3$
(iv) $-3/2$
(v) $1/2$
(vi) -3
(vii) $3/4$
(viii) 0

Lösung 73. Aus $f(t) = g(t)$

$$2^{-\frac{t}{3}} = e^{-\frac{t}{\alpha}},$$

folgt durch log

$$\alpha = \frac{3}{\log(2)}.$$

Lösung 74.

(i) 16
(ii) $1/4$
(iii) 0.2
(iv) 125
(v) $4/5$
(vi) nicht definiert.

Lösung 75.

(i) $x = \frac{\log(11)}{\log(2)}$

(ii) $x = \log(\pi)$

(iii) $x = \frac{5+\log(3)}{2}$

(iv) $x = \frac{\log(0.8)}{\log(10)-\log(0.8)}$

(v) $x = \left(\frac{\log(3)}{\log(7)}\right)^2$

(vi) $x = \frac{2\log(7)}{\log(7)-\log(2)}$

(vii) $x_1 = 100$, $x_2 = 1/100$

(viii) $x = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Lösung 76.

(i) $x = \frac{\log(6)-2\log(5)}{\log(6)-\log(5)}$

(ii) $x = \frac{\log(24)}{\log(10)}$

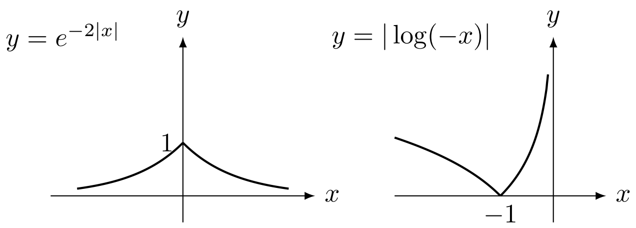
(iii) $x = \left(\frac{\log(2)+\sqrt{(\log(2))^2+4\log(3)\log(5)}}{2\log(5)}\right)^2$

(iv) $x = \frac{\log(1+2\sqrt{3})}{\log(3)}$

(v) $x = \frac{\log((1+\sqrt{13})/2)}{\log(2)}$

Lösung 77.

(i)



(ii) Lösungsmenge erste Ungleichung: $(-\frac{\log(2)}{2}, \frac{\log(2)}{2})$
Lösungsmenge zweite Ungleichung: $(-e, -\frac{1}{e})$

Lösung 78. $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$, 1, $\frac{8}{3}$, -5, $-\frac{4}{3}$.

Lösung 79. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

Lösung 80. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, $b_1 = 3$, $b_{n+1} = 2b_n - 1$.

Lösung 81.

(i) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

(ii) $a_n = -4 + 7(n-1)$

Lösung 82.

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Lösung 83.

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

(iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

(v) $\lim_{n\to\infty} a_n$ exisitiert nicht.

(vi) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

(vii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(viii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ix) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

(x) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

(xi) $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$

Lösung 84. $a_1 = 42$, $a_n = a_{n-1} + 3$, $b_1 = 19$, $b_n = -b_{n-1}$.

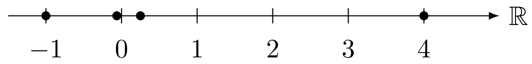
Lösung 85.

(i) $a_n = \frac{2}{3^{n-1}}$

(ii) $a_n = 17n!$

Lösung 86.

(i) $(a_n) = 4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \ldots$

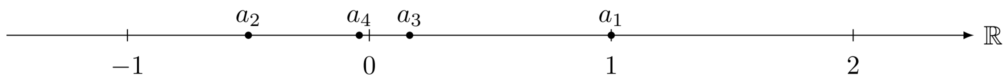


(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(iii) $a_n = 4\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Lösung 87.

(i) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$



(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(iii) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Lösung 88. Man beachte dass $g(x)$ für $x = 0$ nicht definiert ist.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 7$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

Der rechts- und linksseitige Grenzwert sind nicht identisch, $\lim_{x\to 0} f(x)$ und $\lim_{x\to 0} g(x)$ existieren somit nicht.

Lösung 89. (i) 4, (ii) -2, (iii) $1/30$, (iv) $1/2$.

Lösung 90. (i) 2, (ii) $1/2$, (iii) ∞, (iv) $-\infty$, (v) 2.

Lösung 91.

(i) $3/2$
(ii) $5/4$
(iii) $1/10$
(iv) $-1/3$
(v) $-1/2$
(vi) -2
(vii) -1
(viii) -1
(ix) $1/6$

Lösung 92. (i) 5, (ii) 0, (iii) $4/3$, (iv) $1/5$

Lösung 93. $b = 0, -2$

Lösung 94.

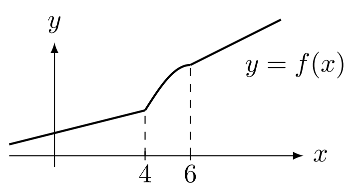
(i) Lösung unter Verwendung einer viertel Periode für den gesuchten Bereich: $A = 4$, $B = \frac{\pi}{4}$, $C = -\pi$, $D = 4$, i.e.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & x \le 4, \\ 4\sin(\frac{\pi}{4}x - \pi) + 4 & 4 < x < 6, \\ x + 2 & x \ge 6. \end{cases}$$

Lösung unter Verwendung einer halben Periode für den gesuchten Bereich: $A = 2$, $B = \frac{\pi}{2}$, $C = -\pi/2$, $D = 6$, i.e.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & x \le 4, \\ 2\sin(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}) + 6 & 4 < x < 6, \\ x + 2 & x \ge 6. \end{cases}$$

(ii) Gezeichnet ist die Lösung unter Verwendung einer viertel Periode



Lösung 95. Wir wissen dass

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Für $C = 1$ gilt somit

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = C = f(0)$$

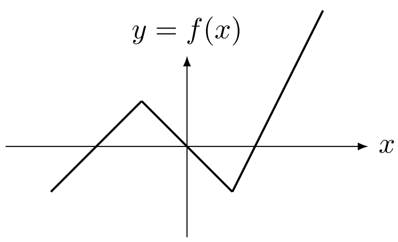
i.e. für $C = 1$ ist die Funktion stetig.

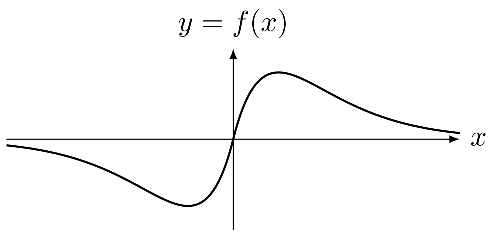
Lösung 96.

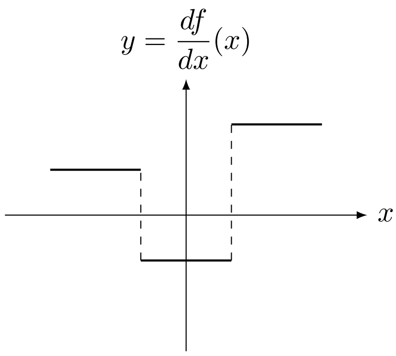
$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{1-2(x+h)} - \frac{x}{1-2x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+h)(1-2x)-x(1-2x-2h)}{(1-2x-2h)(1-2x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h-2x^2-2xh-x+2x^2+2xh}{(1-2x-2h)(1-2x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{(1-2x-2h)(1-2x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1-2x-2h)(1-2x)} \\
&= \frac{1}{(1-2x)^2}.
\end{aligned}$$

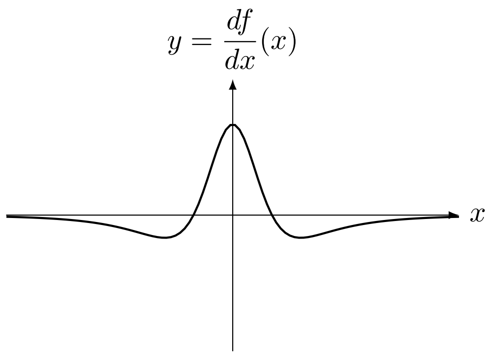
Lösung 97. $\frac{df}{dx}(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

Lösung 98.



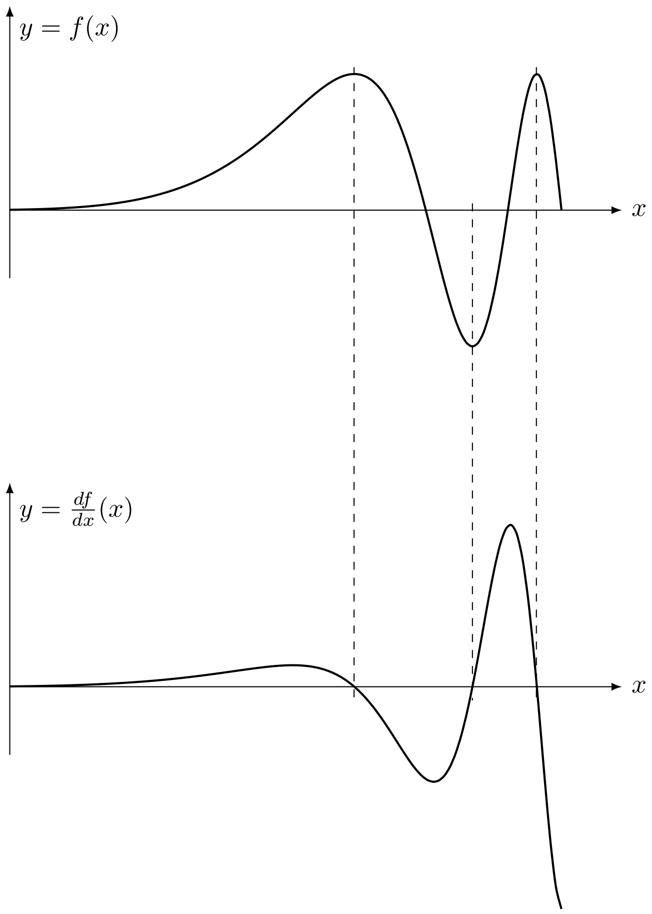




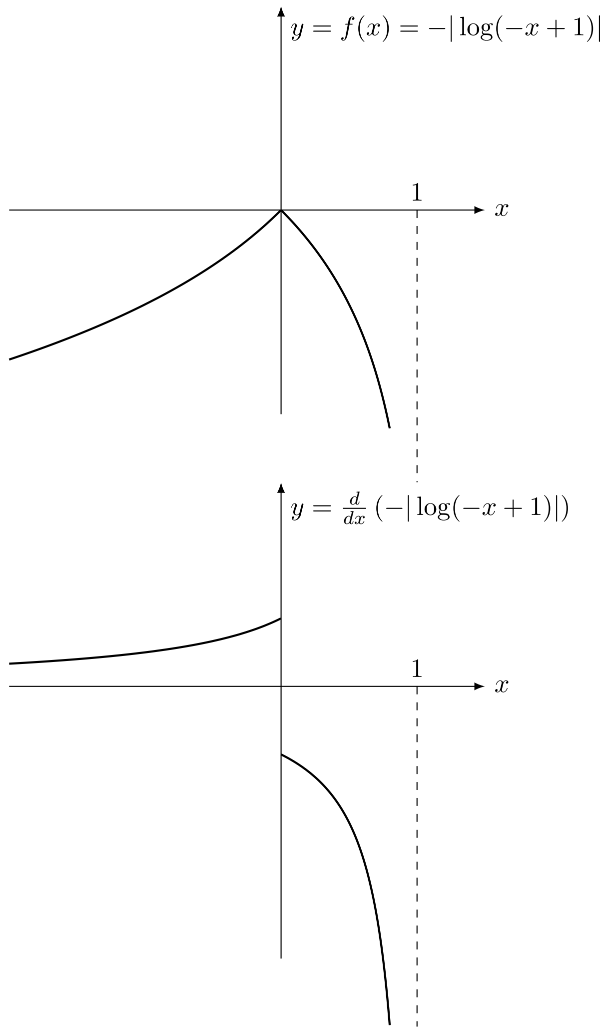


Lösung 99.

(i)



(ii)



Lösung 100.

(i) $\frac{df}{dx}(x) = 13x^{12}$
(ii) $\frac{df}{dx}(x) = 12x^{5}$
(iii) $\frac{df}{dx}(x) = 0$
(iv) $\frac{df}{dx}(x) = 2x + 3x^2$
(v) $\frac{df}{dx}(x) = 21x^6 + 8x$
(vi) $\frac{df}{dx}(x) = n_1 C_1 x^{n_1-1} + n_2 C_2 x^{n_2-1}$

Lösung 101. Wir suchen eine Gleichung der Form $y = mx + b$. Die Steigung ist gegeben durch die Ableitung, i.e.

$$\frac{df}{dx}(x) = 12x^3 - 4x + 3.$$

Daraus folgt dass die Steigung bei $x_0 = 1$ gegeben ist durch

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(1) = 11.$$

Dies ist die Steigung der Tangente, i.e. $m = 11$. Der Punkt durch welchen die Tangente verläuft hat x-Koordinate $x_0 = 1$ und y -Koordinate $y_0 = f(x_0) = -3$. Einsetzen dieser Koordinaten und der Steigung m in die Gleichung $y = mx + b$ ergibt eine Gleichung für b:

$$-3 = 11 \cdot 1 + b,$$

i.e. $b = -14$ und die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle $x = 1$ ist $y = 11x - 14$.

Lösung 102. Die Tangente an die Parabel ist im Scheitelpunkt eine horizontale Gerade, i.e. ihre Steigung ist Null. Die Steigung ist gegeben durch

$$\frac{df}{dx}(x) = 6x + 2.$$

Nullsetzen dieser Gleichung und auflösen nach x ergibt die x-Koordinate des Scheitelpunktes $x_S = -\frac{1}{3}$. Einsetzen in $f(x)$ ergibt die y-Koordinate des Scheitelpunktes $y_S = \frac{5}{3}$.

Lösung 103. Die Gleichung

$$\frac{df}{dx}(x) = x^2 - 3x + 4 \stackrel{!}{=} 2$$

liefert $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Die zugehörigen Funktionswerte sind $f(1) = -11/6$, $f(2) = 0$. Somit sind die gesuchten Punkte $(1, -11/6)$, $(2, 0)$.

Lösung 104.

(i) $\frac{df}{dx}(x) = 10x + 10$
(ii) $\frac{df}{dx}(x) = x^{999}$
(iii) $\frac{df}{dx}(x) = 1$
(iv) $\frac{df}{dx}(x) = 0$
(v) $\frac{df}{dx}(x) = 2x + 4$
(vi) $\frac{df}{dx}(x) = 3y^2x^2$
(vii) $\frac{df}{dx}(x) = x^6 + \frac{12}{7}x^5$

Bemerkung: Bei (vi) muss davon ausgegangen werden dass y eine Konstante ist.

Lösung 105.

(i) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist. Die geometrische Interpretation der Konstanten C ist die folgende: Die Konstante C steht für eine Verschiebung des Graphen in y-Richtung. Die Ableitung sieht eine solche Verschiebung aber nicht, da für sie nur die Steigung, nicht aber die vertikale Lage des Graphen relevant ist. Die physikalische Interpretation der Konstanten C ist die folgende: Die Ableitung entspricht der Geschwindigkeit. Für die Berechnung der Geschwindigkeit ist aber die absolute Position eines Körpers nicht entscheidend, da in der Berechnung nur Differenzen von Positionen auftreten. Wenn man nun aus einem Geschwindigkeitsverlauf den Wegverlauf bestimmt (und dies wird in der vorliegenden Aufgabe gemacht, wenn man sie physikalisch interpretiert) dann ist die Konstante C die Position zum Zeitpunkt $t = 0$.
(ii) Aus $2 = f(1) = \frac{1}{3} + 1 + C$ folgt $C = \frac{2}{3}$. Somit ist $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}$.

Lösung 106. $\frac{df}{dx}(x) = 28x^6 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 8(\cos(x) - \sin(x)) + 13e^x$.

Lösung 107. (i) $\frac{df}{dx}(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, (ii) $\frac{df}{dx}(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$, (iii) $\frac{df}{dx}(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin(x)$.

Lösung 108. $\frac{df}{dx}(x) = \frac{du}{dx}(x)v(x)w(x) + u(x)\frac{dv}{dx}(x)w(x) + u(x)v(x)\frac{dw}{dx}(x)$.

Lösung 109. $\frac{df}{dx}(x) = \dots$

(i) $\cos(x)$
(ii) $2\cos(2x)$
(iii) $2x\cos(x^2)$
(iv) $6x\cos(x^2)$
(v) $6x\cos(x^2 + 7)$
(vi) $(6x + 21)\cos(x^2 + 7x)$
(vii) $(6x + 21)\cos(x^2 + 7x + 4)$
(viii) $-\cos(\cos(x))\sin(x)$
(ix) $-2\cos(\cos(2x))\sin(2x)$
(x) $-2x\cos(\cos(x^2))\sin(x^2)$

Lösung 110.

$$\frac{df}{dx}(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}.$$

Lösung 111. $\frac{df}{dx}(x) = \dots$

(i) $-\frac{1}{x^2}$
(ii) $-\frac{1}{2x^2}$
(iii) $-\frac{2}{x^3}$
(iv) $-\frac{2}{3x^3}$
(v) $-\frac{6x}{(3x^2+5)^2}$
(vi) $-\frac{6x+5}{(3x^2+5x)^2}$
(vii) $-\frac{6x+5}{(3x^2+5x+3)^2}$
(viii) $-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$
(ix) $-\frac{2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$
(x) $-\frac{2x\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$

Lösung 112. $\frac{df}{dx}(x) = \dots$

(i) $-\frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2}$
(ii) $-\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}}$
(iii) $\frac{1}{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}$
(iv) $-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

Lösung 113. $\frac{df}{dx}(x) = \dots$

(i) $2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
(ii) $\frac{2x}{\sin(x)} - \frac{x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$
(iii) xe^x
(iv) $\frac{2-x}{e^x}$

Lösung 114.

(i) $\frac{df}{dx}(x) = -88(3-8x)^{10}$
(ii) $\frac{df}{dx}(x) = \frac{27}{7}(9z^3)^{-\frac{6}{7}}z^2$

Lösung 115.

(i) $\frac{df}{dx}(x) = 4(12x+7)(6x^2+7x)^3$
(ii) $\frac{dg}{dt}(t) = -2(8t-3)(4t^2-3t+2)^{-3}$
(iii) $\frac{df}{dz}(z) = -\frac{8}{3}(1-8z)^{-\frac{2}{3}}$
(iv) $\frac{df}{dx}(x) = 2(3+\frac{1}{\cos^2(x)})\cos(3x+\tan(x))$
(v) $\frac{dh}{du}(u) = \frac{10}{\cos^2(4+10u)}$
(vi) $\frac{dg}{dt}(t) = (4+7t^6)e^{4t+t^7}$
(vii) $\frac{dg}{dx}(x) = \sin(x)e^{1-\cos(x)}$
(viii) $\frac{dH}{dz}(z) = -6(2^{1-6z})\log(2)$
(ix) $\frac{dF}{dy}(y) = \frac{-10y+3y^2}{1-5y^2+y^3}$
(x) $\frac{dV}{dx}(x) = \frac{\cos(x)+\frac{1}{\sin^2(x)}}{\sin(x)-\cot(x)}$

Lösung 116. $\frac{df}{dx}(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $\frac{dg}{dx}(x) = \log(a)a^x$, $\frac{dh}{dx}(x) = x^x(1+\log(x))$

Lösung 117.

(i) $\frac{dk}{dz}(z) = \frac{1}{z-\sqrt{z^2+1}}(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+1}})$
(ii) $\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{x\log(x)}$
(iii) $\frac{dh}{dt}(t) = \frac{1}{\sin(t)\cos(t)}$
(iv) $\frac{dg}{du}(u) = 10(u\log(u))^9(\log(u)+1)$
(v) $\frac{df}{dx}(x) = -\frac{x^2(1+3\log(x))}{2(x^3\log(x))^{3/2}}$

Lösung 118. Wir haben $f^{-1}(x) = h(x)$. Die Formel für die Ableitung der inversen Funktion ergibt somit

$$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(h(x))}.$$

Da $h(-14) = -2$, folgt $\frac{dh}{dx}(-14) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(-2)}$. Mit $\frac{df}{dx}(-2) = 9$ folgt $\frac{dh}{dx}(-14) = \frac{1}{9}$.

Lösung 119. Die Formel für die Ableitung der inversen Funktion ergibt

$$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{1}{\frac{dg}{dx}(h(x))}.$$

Dieser Ausdruck soll bei $x = 3$ bestimmt werden. Wir benötigen $\frac{dg}{dx}(h(3))$. Aus der Tabelle finden wir $h(3) = 4$ und $\frac{dg}{dx}(4) = 1/2$. Somit folgt $\frac{dh}{dx}(3) = 2$.

Lösung 120.

(i) $f'(x) = 2x + \sin(x) + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

(ii) $g'(s) = \sin\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{s^2}$

(iii) $h'(t) = (1-e)t^{-e}$

(iv) $k'(u) = -100(3u^2 - 2u + 1)^{-101}(6u-2)$

(v) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

(vi) $g'(s) = \frac{1}{2s+\log(3s)}\left(2 + \frac{1}{s}\right)$

(vii) $h'(t) = -\left(\frac{1+\sin(3t)}{3-2t}\right)^{-2}\left(\frac{3\cos(3t)}{3-2t} + 2\frac{1+\sin(3t)}{(3-2t)^2}\right)$

(viii) $k'(u) = \frac{d}{du}e^{\sqrt{u}\log(12)}$
$= 12^{\sqrt{u}} \cdot \frac{\log(12)}{2\sqrt{u}}$

Lösung 121.

(i) $-\frac{13}{3}$

(ii) 6

(iii) $-\frac{1}{9}$

(iv) $-\frac{1}{3}$

(v) $-\frac{4}{9}$

Lösung 122. Wir wählen $f(x) = \cos(x)$, $f^{-1}(x) = \arccos(x)$. Wir haben $\frac{df}{dx}(x) = -\sin(x)$ und die Formel für die Ableitung der inversen Funktion ergibt

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

Aus $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ folgt[7] $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$. Damit vereinfacht sich der obige Nenner zu $-\sin(\arccos(x)) = -\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = -\sqrt{1-x^2}$. Wir erhalten somit

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lösung 123. Für eine kompakte Schreibweise verwenden wir die Notation nach Lagrange.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 18x + 14, \\ f''(x) &= 12x^2 - 18, \\ f'''(x) &= 24x, \\ f^{(4)}(x) &= 24, \\ f^{(5)}(x) &= 0, \\ f^{(6)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Lösung 124. $\frac{d^3 f}{dx^3}(2) = -5/8$.

Lösung 125.

(i) Die Ableitungen der Funktion $\sin(x)$ sind (in der Reihenfolge $n = 2, 3, 4, 19$): $-\sin(x)$, $-\cos(x)$, $\sin(x)$, $-\cos(x)$.

(ii) Die Ableitungen der Funktion $\cos(x)$ sind: $-\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$.

[7] Wir behalten nur die +-Lösung da $\sin(x)$ im Geltungsbereich der Gleichung $\arccos(\cos(x)) = x$ positiv ist (dieser Geltungsbereich ist das Intervall $[0, \pi]$).

(iii) Alle Ableitungen der Funktion e^x sind e^x.
(iv) Die Ableitungen der Funktion e^{2x} sind: $4e^{2x}$, $8e^{2x}$, $16e^{2x}$, $2^{19}e^{2x}$.
(v) Die Ableitungen der Funktion $1/x$ sind: $\frac{2}{x^3}$, $-\frac{6}{x^4}$, $\frac{24}{x^5}$, $-\frac{19!}{x^{20}}$.