

**PRÜFUNG ANALYSIS 1**  
**7. NOVEMBER 2025**  
**MUSTERLÖSUNG**

**Punkteverteilung.**

|         |    |    |    |    |    |       |
|---------|----|----|----|----|----|-------|
| Aufgabe | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | Total |
| Punkte  | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 50    |

**Aufgabe 1:** Sei

$$f(x) = x^2 - 7x + 12.$$

- (i) Man ergänze quadratisch um die Funktionsgleichung  $y = f(x)$  in Scheitelform zu schreiben. Man bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes  $S$ .
- (ii) Man schreibe die Funktionsgleichung  $y = f(x)$  in der Produktform, i.e. als Produkt von Linearfaktoren.
- (iii) Man bestimme die Lösungsmenge des folgenden Systems von Ungleichungen

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ |x - 5| < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

**Lösung.**

- (i) Wir betrachten die Funktionsgleichung  $y = x^2 - 7x + 12$  und ergänzen quadratisch.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 7x + 12 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7^2}{2^2} + 12 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{48}{4} \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Somit ist die Scheitelpunktsform

$$y + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$$

und die Koordinaten des Scheitelpunktes sind  $S(7/2, -1/4)$ .

- (ii) Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$x_{\pm} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}.$$

Somit sind die Nullstellen von  $f(x)$  bei  $x = 3$  und bei  $x = 4$  und die Produktform der Funktionsgleichung ist

$$y = (x - 3)(x - 4).$$

- (iii) Die Parabel zu  $f(x)$  ist nach oben geöffnet und schneidet bei  $x = 3$  und  $x = 4$  die  $x$ -Achse. Sie verläuft also im Intervall  $(3, 4)$  unterhalb der  $x$ -Achse, was negativen Funktionswerten entspricht. Somit besitzt die Ungleichung  $f(x) \geq 0$  die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_1 = \mathbb{R} \setminus (3, 4).$$

Die zweite Ungleichung besitzt die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

Somit ist die Lösungsmenge des Ungleichungssystems gegeben durch

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \left[4, \frac{13}{2}\right).$$

**Aufgabe 2:** Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

(i) Man bestimme für die folgenden Funktionen den grösstmöglichen Definitionsbereich:

$$f(x) = 3 - \log(-2x), \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - 3}.$$

(ii) Man bestimme ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder weder noch sind:

$$m(x) = x^5 + x^8, \quad n(x) = x^3|x| + e^{|x|}.$$

(iii) Sei  $k(x)$  eine periodische Funktion mit Periode  $p = 4$ . Man bestimme die Periode der Funktion

$$l(x) = 2k(x/3) + \sqrt{3}.$$

(iv) Von einer Funktion  $q(x)$  weiss man dass sie zwei Nullstellen besitzt. Eine bei  $x_1 = -7$  und eine bei  $x_2 = 3$ . Man bestimme die Nullstellen der Funktion

$$t(x) = 12\left(q(1-x)\right)^2.$$

**Lösung.**

(i) Definitionsbereich für  $f(x)$ :  $D = (-\infty, 0)$ .

Definitionsbereich für  $g(x)$ :  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ .

(ii)  $m(x)$  ist weder noch, da

$$m(-x) = (-x)^5 + (-x)^8 = -x^5 + x^8 \quad \text{und somit} \quad m(-x) \neq m(x), \quad \text{und} \quad m(-x) \neq -m(-x).$$

$n(x)$  ist weder noch, da

$$n(-x) = (-x)^3|-x| + e^{|-x|} = -x^3|x| + e^{|x|} \quad \text{und somit} \quad n(-x) \neq n(x), \quad \text{und} \quad n(-x) \neq -n(-x)..$$

(iii) Die Periode von  $l(x)$  ist  $p_k = 12$ .

(iv) Aus  $t(x) = 0$  folgt  $q(1-x) = 0$  und daraus die beiden Möglichkeiten  $1-x = -7$  und  $1-x = 3$  (weil  $-7$  und  $3$  die Nullstellen von  $q(x)$  sind). Daraus ergeben sich die beiden Nullstellen von  $t(x)$  zu:

$$x_1 = 8, \quad x_2 = -2.$$

**Aufgabe 3:** Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Man finde die folgenden Grenzwerte:

$$(i) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{7+x}{49-x^2}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{2-\sqrt{2x}}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+3x^3}{7x^2+7x^3}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -1.5^+} \frac{|2x+3|}{6+4x}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(5x)}{2 \sin(4x)}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - e^{\frac{1}{x}}$$

Man bestimme die untenstehenden Ausdrücke unter Verwendung von

$$f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \begin{cases} -x & -2 \leq x < 0 \\ x-1 & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$(vii) f(f(2))$$

$$(viii) g(f(3))$$

$$(ix) g(g(-1))$$

$$(x) f(g(1/2))$$

**Lösung.**

(i)

$$\lim_{x \rightarrow -7} \frac{7+x}{49-x^2} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{7+x}{(7+x)(7-x)} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{1}{7-x} = \frac{1}{14}$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow -1.5^+} \frac{|2x+3|}{6+4x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1.5^+} \frac{|2x+3|}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{2-\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)}{(2-\sqrt{2x})(2+\sqrt{2x})} \frac{(2+\sqrt{2x})}{(2+\sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+\sqrt{2x})}{4-2x} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2} (2+\sqrt{2x}) = 2$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(5x)}{2 \sin(4x)} = \frac{3}{2} \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+3x^3}{7x^2+7x^3} = \frac{3}{7}$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$(vii) \quad f(f(2)) = f(0) = 2$$

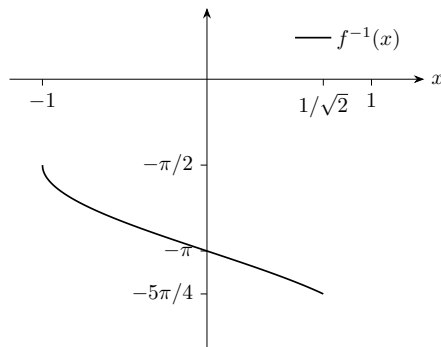
$$(viii) \quad g(f(3)) = g(-1) = -(-1) = 1$$

$$(ix) \quad g(g(-1)) = g(1) = 1 - 1 = 0$$

$$(x) \quad f(g(\tfrac{1}{2})) = f(\tfrac{1}{2} - 1) = f(-\tfrac{1}{2}) = 2 - (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{2}$$

**Aufgabe 4:** Wir betrachten die trigonometrische Funktion  $f(x) = \sin(x)$  mit eingeschränktem Definitionsbereich  $[-5\pi/4, -\pi/2]$ .

(i) Man bestimme das Bild dieser Funktion.

(ii) Man bestimme den Definitionsbereich und das Bild der inversen Funktion  $f^{-1}$ .(iii) Man skizziere den Graph der inversen Funktion  $f^{-1}$ .(iv) Man berechne  $f^{-1}(-\frac{1}{2})$ .**Lösung.**(i) Das Bild der Funktion  $f$  ist  $[-1, 1/\sqrt{2}]$ .(ii) Der Definitionsbereich der inversen Funktion  $f^{-1}$  ist  $[-1, 1/\sqrt{2}]$  und das Bild von  $f^{-1}$  ist  $[-5\pi/4, -\pi/2]$ .(iii) Spiegelung des ursprünglichen Graphen an der Geraden  $y = x$  ergibt den Graphen von  $f^{-1}$ .

$$(iv) \quad f^{-1}(-\tfrac{1}{2}) = -5\pi/6.$$

**Aufgabe 5:** Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-2} & x < -2, \\ A\sqrt{x+B} + C & -2 \leq x \leq 7, \\ -4 + \log(x-6) & x > 7. \end{cases}$$

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

- (i) Man skizziere den Graphen  $y = f(x)$  für  $x \in (-\infty, -2)$ .
- (ii) Man skizziere den Graphen  $y = f(x)$  für  $x \in (7, \infty)$ .
- (iii) Man finde Werte für die Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $C$ , so dass die Funktion  $f(x)$  stetig ist.

**Lösung.**

- (i) Siehe (iii).
- (ii) Siehe (iii).
- (iii) Eine mögliche Lösung ist  $A = -5/3$ ,  $B = 2$ ,  $C = 1$ .

