PRÜFUNG ANALYSIS 1
16. OKTOBER 2023
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	Total
Punkte	7.5	7.5	7.5	7.5	30

Aufgabe 1: Sei

$$f(x) = -2x^2 - 8x - 6.$$

(i) Man schreibe die Funktion $f(x)$ als Produkt von Linearfaktoren.
(ii) Man ergänze quadratisch um die Funktionsgleichung $y = f(x)$ in Scheitelform zu schreiben.
(iii) Sei $g(x) = 3x - 2$. Man zeige dass die Funktion

$$h(x) = (g \circ f)(x)$$

eine ganzrationale Funktion ist und bestimme ihre Koeffizienten.
(iv) Sei $k(x) = ax$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung

$$f(x) + k(x) = 0$$

genau eine reelle Lösung?

Lösung.

(i) $-2x^2 - 8x - 6 \stackrel{!}{=} 0$ ergibt $x_\pm = -2 \pm 1$. Somit ist die Funktion als Produkt von Linearfaktoren geschrieben:

$$f(x) = -2(x+3)(x+1).$$

(ii) Wir ergänzen quadratisch:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 - 8x - 6 \\ &= -2(x^2 + 4) - 6 \\ &= -2((x+2)^2 - 4) - 6 \\ &= -2(x+2)^2 + 2. \end{aligned}$$

Somit ist die Funktionsgleichung in Scheitelform

$$y - 2 = -2(x+2)^2$$

(i.e. der Scheitelpunkt besitzt Koordinaten $(-2, 2)$).

(iii) Wir haben

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = g(f(x)) &= 3\left(-2x^2 - 8x - 6\right) - 2 \\ &= -6x^2 - 24x - 20. \end{aligned}$$

Dies ist eine ganzrationale Funktion mit Koeffizienten $a_2 = -6$, $a_1 = -24$, $a_0 = -20$.

(iv) Die Gleichung $f(x) + g(x) = 0$ mit $g(x) = ax$ ist

$$-2x^2 + (a-8)x - 6 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt genau eine reelle Lösung, falls

$$(a-8)^2 - 48 = 0.$$

I.e. für

$$a = 8 \pm \sqrt{48}.$$

Aufgabe 2: Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

(i) Man bestimme für die folgenden Funktionen den grösstmöglichen Definitionsbereich:

$$f(x) = -2 + \sqrt{-x}, \qquad g(x) = \frac{1}{|1-x|}.$$

(ii) Man bestimme ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder weder noch sind:

$$h(x) = \frac{x}{1-x}, \qquad k(x) = x^2|x| + 3.$$

(iii) Sei $l(x)$ eine periodische Funktion mit Periode $p = 3$. Man bestimme die Periode der Funktion

$$m(x) = 2\,l(2x) - 17.$$

(iv) Von einer Funktion $s(x)$ weiss man dass sie zwei Nullstellen besitzt. Eine bei $x_1 = -3$ und eine bei $x_2 = 2$. Man bestimme die Nullstellen der Funktion

$$t(x) = -5\Big(s(1-x)\Big)^3.$$

Lösung.

(i) Definitionsbereich für $f(x)$: $D = (-\infty, 0]$.
Definitionsbereich für $g(x)$: $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

(ii) $h(x)$ ist weder noch, da

$$h(-x) = \frac{-x}{1+x} \quad \text{und somit} \quad h(-x) \neq h(x), \quad \text{und} \quad h(-x) \neq -h(-x).$$

$k(x)$ ist gerade, da

$$k(-x) = (-x)^2|-x| + 3 = x^2|x| + 3 = k(x).$$

(iii) Die Periode von $m(x)$ ist $p_m = \frac{3}{2}$.

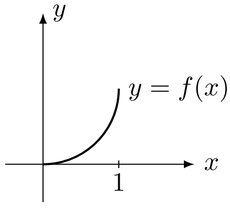
(iv) Aus $t(x) = 0$ folgt $s(1-x) = 0$ und daraus die beiden Möglichkeiten $1 - x = -3$ und $1 - x = 2$ (weil -3 und 2 die Nullstellen von $s(x)$ sind). Daraus ergeben sich die beiden Nullstellen von $t(x)$ zu:

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = -1.$$

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

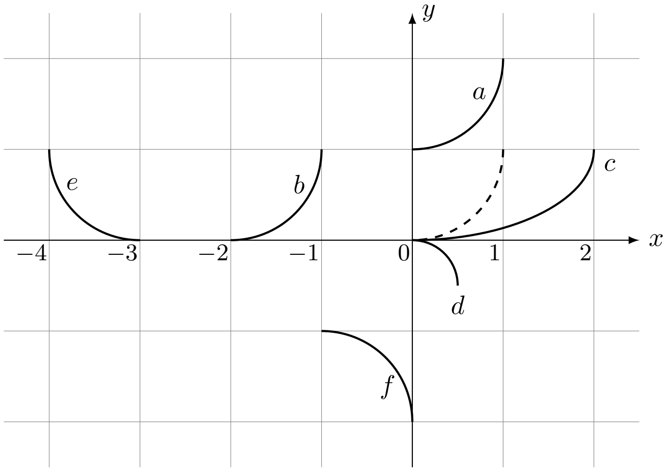
Der Graph der Funktion ist in der untenstehenden Figur eingezeichnet, es handelt sich um einen Viertelkreis.



Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

(i) Man bestimme die Funktionsgleichung der inversen Funktion $f^{-1}(x)$ und zeichne den dazugehörigen Graph.

(ii) In der untenstehenden Figur sind zusätzlich zum Graph $y = f(x)$ (gestrichelt) die weiteren Graphen $a, \ldots, f$ eingezeichnet. Diese gehören zu transformierten Funktionen der Funktion $f(x)$. Beispielsweise ist die Funktion zum Graph a gegeben durch $f(x) + 1$. Man bestimme die transformierten Funktionen für die Graphen $b, \ldots, f$.



Lösung.

(i) Auflösen von

$$y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

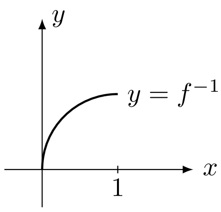
nach x ergibt

$$x = \sqrt{1 - (1 - y)^2}\,,$$

wobei wir die positive Wurzel gewählt haben, da der Definitionsbereich von $f(x)$ gegeben ist durch $[0, 1]$. Somit ist die inverse Funktion gegeben durch

$$f^{-1}(x) = \sqrt{1 - (1 - x)^2}.$$

Der Graph dazu ist:



(ii)

b	$f(x + 2)$
c	$f(x/2)$
d	$-\frac{1}{2} f(2x)$
e	$f(-x - 3)$
f	$-f(x + 1) - 1$

Aufgabe 4: Sei

$$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$$

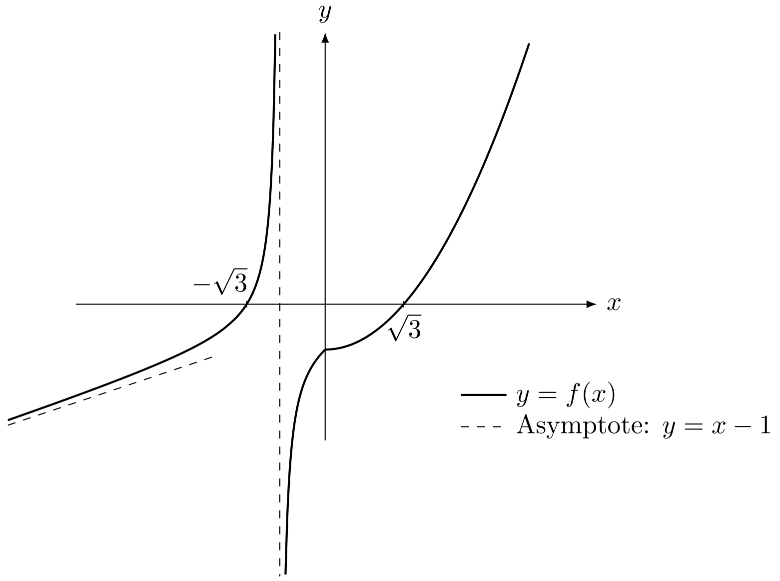
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3}{x + 1} & x < 0, \\ x^2 - 3 & x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Man bestimme $(f(1))^2$ und $(f \circ f)(0)$.
(ii) Man skizziere den Graphen $y = f(x)$.
(iii) Ist $f(x)$ injektiv? Man begründe die Antwort.

Lösung.

(i) $f(1) = -2$, $(f(1))^2 = 4$, $f(f(0)) = f(-3) = -3$.

(ii) Die Funktion $\frac{x^2-3}{x+1} = \frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x+1} = x - 1 - \frac{2}{x+1}$ besitzt bei $x = -1$ eine Polstelle, bei $x = \pm\sqrt{3}$ eine Nullstelle und die Asymptote ist $y = x - 1$.



(iii) $f(x)$ ist nicht injektiv. Begründung durch Test mit horizontaler Geraden am Graphen: Beispielsweise die Gerade $y = 0$ schneidet den Graphen bei $x = -\sqrt{3}$ und $x = \sqrt{3}$, i.e. $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 0$.