

PRÜFUNG ANALYSIS 1, 14. JANUAR 2026
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Total
Punkte	7	7	7	7	7	7	7	+1 = 50

Aufgabe 1: Man leite die folgenden Funktionen nach ihrem Argument ab:

- | | | |
|---|---------------------------------|--------------------------------|
| (i) $f(x) = -5 + \frac{1}{17}x^{17}$ | (iv) $m(y) = \cos(y) - \sin(y)$ | (vi) $n(p) = e^p \log(p)$ |
| (ii) $h(s) = 4\sqrt{\frac{s}{2}}$ | (v) $l(v) = \cos(v^3)$ | (vii) $q(z) = \frac{z}{1+z^2}$ |
| (iii) $g(t) = -3t^{-\sqrt{2}} + 2^{-3}$ | | |

Lösung.

- | | |
|--|--|
| (i) $f'(x) = x^{16}$ | (v) $l'(v) = -\sin(v^3)3v^2$ |
| (ii) $h'(s) = \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{d}{ds} \sqrt{s} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{2}{s}}$ | (vi) $n'(p) = e^p \log(p) + e^p \frac{1}{p}$ |
| (iii) $g'(t) = 3\sqrt{2}t^{-\sqrt{2}-1}$ | (vii) $q'(z) = \frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{(1+z^2)^2} 2z$ |
| (iv) $m'(y) = -\sin(y) - \cos(y)$ | |

Aufgabe 2:

- (i) Basierend auf der Definition der Ableitung bestimme man die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}.$$

- (ii) Für eine Funktion $g(x)$ heisst der Ausdruck

$$G(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Logarithmische Ableitung von $g(x)$. Man zeige dass die logarithmische Ableitung eines Produkts von zwei Funktionen die Summe der logarithmischen Ableitungen der Funktionen ist.

Lösung.

- (i)

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+h)}{x+h-1} - \frac{2x}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)(x-1) - 2x(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= -\frac{2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

- (ii) Sei $g(x)$ gegeben durch ein Produkt von zwei Funktionen, i.e. sei $g(x) = f_1(x)f_2(x)$. Wir haben

$$g'(x) = f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x)$$

und somit

$$G(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x)}{f_1(x)f_2(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} = G_1(x) + G_2(x).$$

Aufgabe 3: Der Punkt mit Koordinaten $(1, 2)$ liegt auf der Kurve in der x - y -Ebene, welche gegeben ist durch

$$e^{y-2} + x + x^3 - 3y = k,$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

- (i) Man bestimme k .
- (ii) Man finde die Gleichung der Tangente an die obige Kurve im gegebenen Punkt.
- (iii) Ein weiterer Punkt auf der Kurve besitze die Koordinaten $(1.15, y_0)$. Man finde eine Approximation von y_0 . Hinweis: Die Approximation $y_0 \approx 2$ ist zu grob.

Lösung.

- (i) Einsetzen von $(x, y) = (1, 2)$ in die gegebene Gleichung ergibt $k = -3$.
- (ii) Implizites Ableiten der gegebenen Gleichung ergibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3x^2}{3 - e^{y-2}}$$

Einsetzen von $(x, y) = (1, 2)$ ergibt $dy/dx = 2$. Dies ist die Steigung der Tangente. Zusammen mit den Koordinaten des gegebenen Punktes ergibt sich die Gleichung der Tangenten zu $y = 2x$.

- (iii) Einsetzen von $x_0 = 1.15$ in die Tangentengleichung ergibt $y_0 \approx 2 \cdot 1.15 = 2.3$.

Aufgabe 4: Wir betrachten die trigonometrische Funktion Kosekans, gegeben durch

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

- (i) Man bestimme die Ableitung der Kosekansfunktion.
- (ii) Die inverse Funktion der Kosekansfunktion ist Arkuskosekans. Man verwende die Formel für die Ableitung der inversen Funktion

$$\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(x))}$$

und bestimme damit die Ableitung von Arkuskosekans. Man vereinfache das Resultat, so dass keine trigonometrischen Funktionen auftreten. Hinweise:

- (a) Auftretende Sinusfunktionen können mit Hilfe der obigen Definition für den Kosekans umgeschrieben werden.
- (b) Die Definitionsbereiche der trigonometrischen Funktionen müssen nicht berücksichtigt werden.

Lösung.

(i)

$$\frac{d \csc}{dx}(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

(ii)

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc}(x) = \frac{1}{\frac{d \csc}{dx}(\operatorname{arccsc}(x))} = \frac{1}{-\frac{\cos(\operatorname{arccsc}(x))}{\sin^2(\operatorname{arccsc}(x))}}.$$

Die Definition von $\csc(x)$ ergibt

$$\sin^2(x) = \frac{1}{\csc^2(x)}.$$

Daraus folgt

$$\sin^2(\operatorname{arccsc}(x)) = \frac{1}{\csc^2(\operatorname{arccsc}(x))} = \frac{1}{x^2}.$$

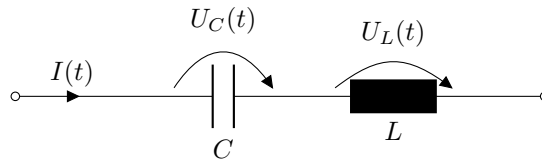
Weiter haben wir mit der Pythagorasidentität der Trigonometrie

$$\cos(\operatorname{arccsc}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{arccsc}(x))} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

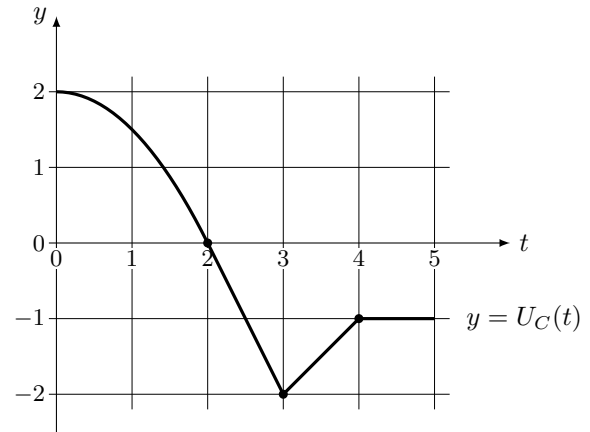
In den obigen Ausdruck für die Ableitung von arccsc eingesetzt ergibt

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc}(x) = -\frac{1}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}.$$

Aufgabe 5: Wir betrachten einen Kondensator mit Kapazität C und eine Spule mit Induktivität L in Serie geschaltet:



Die dargestellte Schaltung ist als Teil eines grösseren Schaltkreises zu betrachten, welcher für die Aufgabe aber nicht relevant ist. Wir bezeichnen mit $U_C(t)$ die Spannung am Kondensator, mit $U_L(t)$ die Spannung an der Spule und mit $I(t)$ den Strom. Wir lassen im folgenden die Einheiten weg. Die Spannung am Kondensator in Abhängigkeit der Zeit ist in der Grafik rechts dargestellt. Der Graph besteht vollständig aus Geraden- und Parabelstücken, separiert durch Punkte.

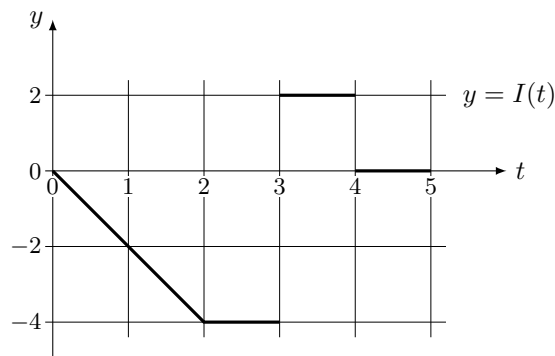


- (i) Es sei $C = 2$. Man zeichne den Graphen $y = I(t)$ und bestimme den maximal fließenden Strom, i.e. das Maximum von $|I(t)|$. Hinweise:
- Für einen Kondensator gilt: $Q = CU_C$, wobei wir mit Q die Ladung auf dem Kondensator bezeichnen und der Zusammenhang zum Strom ist durch $I = \frac{dQ}{dt}$ gegeben.
 - Für diese Teilaufgabe kann der Kondensator separat betrachtet werden.
- (ii) Es sei $L = 2$. Man zeichne den Graphen $y = U_L(t)$. Hinweis: Für eine Spule gilt $U_L = L \frac{dI}{dt}$.

Lösung.

- (i) Wir haben

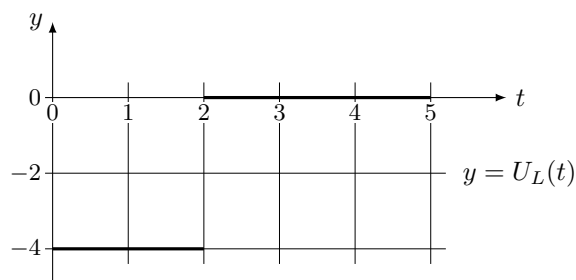
$$I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = C \frac{dU_C}{dt}(t) = 2 \frac{dU_C}{dt}(t).$$



Wir haben $\max |I(t)| = 4$.

- (ii) Wir haben

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt}(t) = 2 \frac{dI}{dt}(t).$$



Aufgabe 6: Man leite die folgenden Funktionen nach ihrem Argument ab:

$$(i) f(x) = 4\sqrt{7 \sin(\sqrt{-2x})}$$

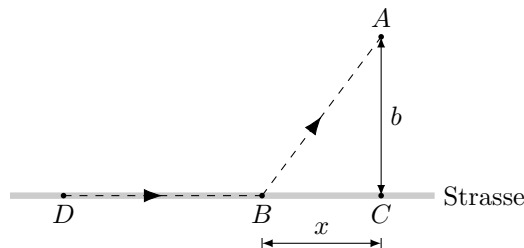
$$(ii) g(t) = \frac{1}{3^{\log(t)}}$$

Lösung.

$$(i) f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{7 \sin(\sqrt{-2x})}} 7 \cos(\sqrt{-2x}) \frac{1}{2\sqrt{-2x}} (-2)$$

$$(ii) g'(t) = \frac{d}{dt} 3^{-\log(t)} = \frac{d}{dt} e^{-\log(t) \log(3)} = e^{-\log(t) \log(3)} \frac{-\log(3)}{t} = -\frac{1}{3^{\log(t)}} \frac{\log(3)}{t}$$

Aufgabe 7: Ein Fahrzeug befindet sich auf einer geraden Strasse im Punkt D und soll den Punkt A im Sand, eine Distanz b entfernt von der Strasse möglichst schnell erreichen.



Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der Strasse beträgt (in SI-Einheiten) $v = 5$ und im Sand $w = 3$. Man bestimme die Distanz x zwischen dem Punkt B , in welchem das Fahrzeug die Strasse verlassen soll und dem Punkt C auf der Strasse, welcher sich am nächsten beim Punkt A befindet.

Lösung. Sei a die Distanz von D nach C . Die Zeit für die Fahrt von D bis zum Punkt A im Sand ist gegeben durch

$$T(x) = \frac{a-x}{5} + \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{3}.$$

Der erste Term entspricht der Zeit für den Wegteil auf der Strasse und der zweite Term der Zeit für den Wegteil im Sand. Wir finden das Minimum durch

$$T'(x) = -\frac{1}{5} + \frac{x}{3\sqrt{x^2+b^2}} = 0.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{3}{4}b.$$