PRÜFUNG ANALYSIS 1
20. NOVEMBER 2023
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	Total
Punkte	7.5	7.5	7.5	7.5	30

Aufgabe 1: Gegeben ist die Folge (a_n) durch die Vorschrift:

$$a_n = \frac{2^n + 1}{2^n}$$

(i) Man bestimme die ersten vier Glieder (beginnend mit a_1) der Folge (a_n) und stelle sie als Graph der Funktion

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

dar. Hier ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(ii) Man bestimme den Grenzwert der Folge (a_n).

(iii) Man finde eine rekursive (i.e. implizite) Beschreibung der Folge (a_n).

(iv) Sei

$$f(x) = \log(x) - \frac{7}{2}$$

Man bestimme den Grenzwert der Folge (b_n) gegeben durch die Vorschrift

$$b_n = f(a_n)$$

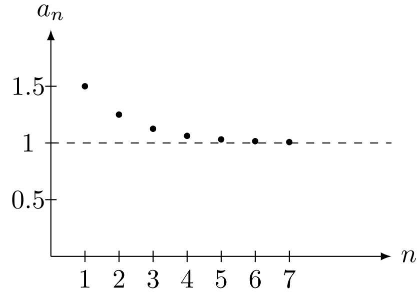
Lösung.

(i) Die Folge lässt sich umschreiben zu

$$a_n = \frac{2^n + 1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n}.$$

Wir haben

$$a_1 = \frac{3}{2}, \qquad a_2 = \frac{5}{4}, \qquad a_3 = \frac{9}{8}. \qquad a_4 = \frac{17}{16}.$$



(ii) Wir haben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

(iii) Wir haben

$$a_n - 1 = \frac{1}{2^n}$$

und somit

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + (a_n - 1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a_n}{2}.$$

I.e. die rekursive Beschreibung der Folge ist

$$a_1 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n}{2}.$$

(iv) Mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \log(a_n) = 0$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\log(a_n) - \frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{2}.$$

Aufgabe 2: Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3 + 4x^2 - 17x + 2}{-3x^3 + 13x^2 + 2}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\log\left(e^{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right)$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{31}{6}\pi} \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0.5} \frac{1-\sqrt{2x}}{2x-1}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to (0.5)^+} \frac{1-2x}{|2x-1|}$

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(\tan(x))\right)$

Lösung.

(i)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3 + 4x^2 - 17x + 2}{-3x^3 + 13x^2 + 2} = \frac{2}{3}$$

(ii)

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\log\left(e^{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \arctan\left(\log\left(e^1\right)\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

(iii)

$$\lim_{x\to -\frac{31}{6}\pi} \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right) = \lim_{x\to -\frac{31}{6}\pi} 1 = 1$$

(iv)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0.5} \frac{1-\sqrt{2x}}{2x-1} = \lim_{x\to 0.5} \frac{(1-\sqrt{2x})}{(2x-1)}\frac{(1+\sqrt{2x})}{(1+\sqrt{2x})} &= \lim_{x\to 0.5} \frac{1-2x}{(2x-1)(1+\sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x\to 0.5} \frac{-1}{1+\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(v) Wir haben

$$\lim_{x\to (0.5)^+} \frac{1-2x}{|2x-1|} = \lim_{x\to (0.5)^+} -\frac{x-0.5}{|x-0.5|}$$

Der Graph der dazugehörigen Funktion entspricht dem Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{x}{|x|}$, um 0.5 nach rechts verschoben. Somit:

$$\lim_{x\to (0.5)^+} \frac{1-2x}{|2x-1|} = -1.$$

(vi)

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(\tan(x))\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(\tan(0))\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(0)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Aufgabe 3: Sei

$$f(t) = 3\sin\left(\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

(i) Man bestimme die Periodendauer von $f(t)$.

(ii) Man skizziere den Graphen $y = f(t)$ für $t \in [-3\pi, 3\pi]$. Hinweis: Der Graph soll qualitativ richtig sein und die Grössen Amplitude, Phase, Periodendauer sollen eingezeichnet sein.

(iii) Man löse die Gleichung

$$f(t) = \frac{1}{2}$$

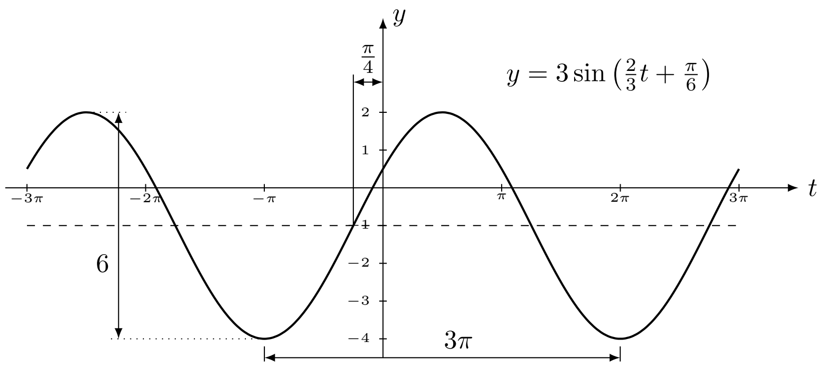
für $t \in [-3\pi, 3\pi]$.

Lösung.

(i) Wir lesen ab: $\omega = \frac{2}{3}$. Somit

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3\pi.$$

(ii)



(iii) $f(t) = 0$ vereinfacht sich zu

$$\sin\left(\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Mit $x = \frac{2}{3}t + \frac{\pi}{6}$ ist dies $\sin(x) = \frac{1}{2}$ mit Lösungen

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Daraus ergibt sich

$$t = k3\pi, \qquad t = \pi + k3\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$ ergeben sich somit die Lösungen

$$t = -3\pi, 0, 3\pi, -2\pi, \pi.$$

Aufgabe 4:

(i) Sei

$$f(x) = \cos^3(x) + \cos(x^3).$$

Man bestimme ob die Funktion $f(x)$ gerade, ungerade oder weder noch ist. Man begründe die Antwort.

(ii) Man gebe die Definition von a^x für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ an.

(iii) Man skizziere in eine Figur die Graphen

$$y = e^x, \qquad y = 2^x, \qquad y = \frac{1}{2^x}$$

und beschreibe die Transformation des Graphen $y = e^x$ welche nötig ist um die beiden anderen Graphen zu erhalten. Hinweis: $e = 2.718\ldots$

Lösung.

(i) Wir haben

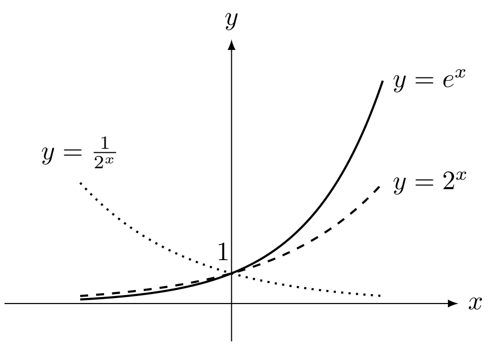
$$\begin{aligned} f(-x) &= (\cos(-x))^3 + \cos((-x)^3) \\ &= (\cos(x))^3 + \cos(-(x)^3) \\ &= (\cos(x))^3 + \cos((x)^3) = f(x), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Gleichung (erster Term) und für die dritte Gleichung (zweiter Term) verwendet haben dass $\cos(-x) = \cos(x)$, i.e. dass die Kosinusfunktion gerade ist. Somit ist $f(x)$ eine gerade Funktion.

(ii)

$$a^x = e^{x\log(a)}$$

(iii)



Wir haben

$$2^x = e^{x\log(2)}$$

Somit: Um den Graphen $y = 2^x$ aus dem Graphen $y = e^x$ zu erhalten ist eine horiziontale Streckung notwendig. Der Streckungsfaktor ist gegeben durch $1/\log(2)$ und es gilt $1/\log(2) > 1$, da $0 < \log(2) < \log(e) = 1$.

Wir haben

$$\frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{x\log(1/2)} = e^{x(-\log(2))}$$

Somit: Um den Graphen $y = \frac{1}{2^x}$ aus dem Graphen $y = e^x$ zu erhalten ist (wie im vorhergehenden Fall) eine Streckung um den Faktor $1/\log(2)$ und anschliessend eine Spiegelung an der y-Achse notwendig.