PRÜFUNG ANALYSIS 1
15. JANUAR 2024
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Total
Punkte	6	6	6	6	6	6	6	42

Aufgabe 1: Man leite die folgenden Funktionen nach ihrem Argument ab:

(i) $f(x) = x^2 - 4x^{-2}$

(ii) $g(t) = \dfrac{7}{\sqrt{t}}$

(iii) $h(s) = \dfrac{\cos(s)}{\sin(s)}$

(iv) $k(u) = \dfrac{u^\pi}{\pi}$

(v) $m(y) = 2\log(2y)$

(vi) $l(v) = e^{(v^2)}$

Lösung.

(i) $f'(x) = 2x + 8x^{-3}$

(ii) $g'(t) = -\frac{7}{2}t^{-\frac{3}{2}}$

(iii) $h'(s) = -\frac{1}{\sin^2(s)}$

(iv) $k'(u) = u^{\pi-1}$

(v) $m'(y) = \frac{2}{y}$

(vi) $l'(v) = e^{v^2}2v$

Aufgabe 2: Man leite die folgenden Funktionen nach ihrem Argument ab:

(i) $f(x) = 3\sin\left(6\sqrt{\cos(9x)\sin(12x)}\right)$

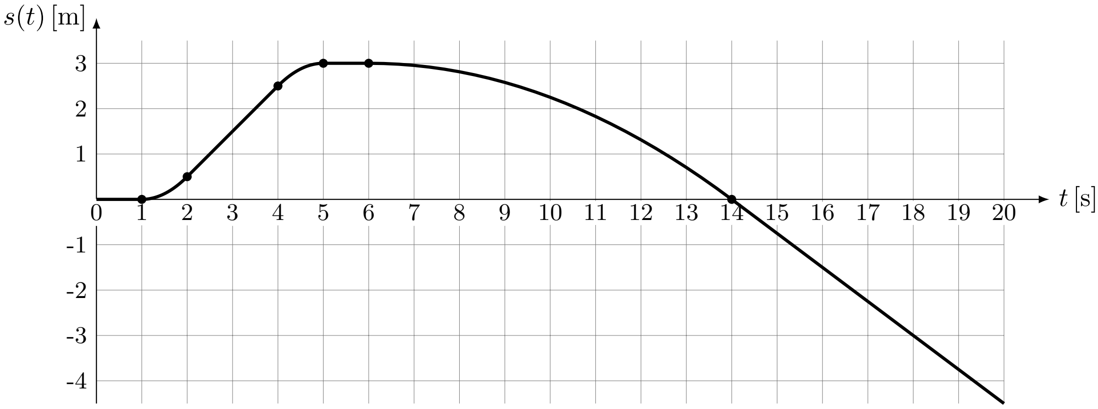
(ii) $g(t) = 2^{\sin(t)}3^{\cos(t)}$

Lösung.

(i) $f'(x) = 3\cos\left(6\sqrt{\cos(9x)\sin(12x)}\right)\frac{6}{2\sqrt{\cos(9x)\sin(12x)}}\Big(-\sin(9x)9\sin(12x)+\cos(9x)\cos(12x)12\Big)$

(ii) $g'(t) = 2^{\sin(t)}3^{\cos(t)}\Big(\cos(t)\log(2) - \sin(t)\log(3)\Big)$

Aufgabe 3: Der folgende Graph zeigt die Position $s(t)$ eines Körpers in Abhängigkeit der Zeit t, welcher sich in einer Dimension bewegt. Der Graph besteht vollständig aus Geraden- und Parabelstücken, separiert durch Punkte. Für die folgenden Aufgaben sollen die Lösungen approximativ aus dem Graphen abgelesen werden.



(i) Man bestimme die Geschwindigkeit und Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 18\,\mathrm{s}$.

(ii) Man bestimme die maximale Geschwindigkeit.

(iii) Welche Bedingungen müssen $s(t)$, $s'(t)$ erfüllen, damit der Körper sich von der Position $s = 0\,\mathrm{m}$ wegbewegt? Man bestimmme den dazugehörgen Zeitbereich.

(iv) Man skizziere qualitativ die Geschwindigkeit $s'(t)$ und die Beschleunigung $s''(t)$.

Lösung. (jeweils in SI-Einheiten)

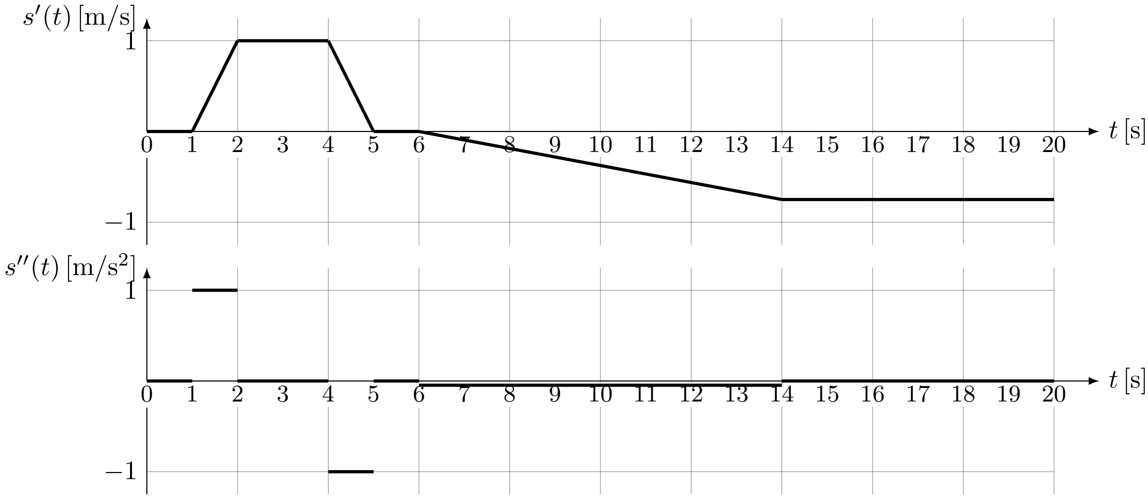
(i) $s'(18) = -\frac{3}{4} = -0.75$, $s''(18) = 0$.

(ii) $s'_{\text{max}} = 1$ (zum Beispiel bei $t = 3$)

(iii) $s(t) > 0$ und $s'(t) > 0$, oder $s(t) < 0$, $s'(t) < 0$. Dazugehöriger Zeitbereich:

$$t \in (1, 5) \cup (14, 20).$$

(iv)



Aufgabe 4: Wir betrachten die Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = e^x \sin(x)\,.$$

(i) Man finde die x-Werte der lokalen Maxima und Minima.

(ii) Für welche x ist die Funktion streng monoton wachsend/fallend?

(iii) Man finde die x-Werte der Wendepunkte.

Lösung. Die erforderlichen Ableitungen sind

$$f'(x) = (\cos(x) + \sin(x))e^x\,, \qquad f''(x) = 2\cos(x)e^x\,, \qquad f'''(x) = 2(\cos(x) - \sin(x))e^x\,.$$

(i) $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ ergibt $\cos(x) = -\sin(x)$, i.e. $\tan(x) = -1$. Daraus folgt $x = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. Mit

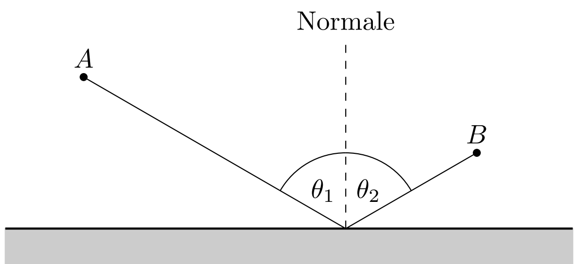
$$f''(-\pi/4) = \sqrt{2}e^{\cdots} > 0\,, \qquad f''(3\pi/4) = -\sqrt{2}e^{\cdots} < 0$$

folgt dass sich bei $x = -\pi/4$ ein lokales Minimum und bei $x = 3\pi/4$ ein lokales Maximum befindet.

(ii) Aus (i) wissen wir dass $f'(-\pi/4) = f'(3\pi/4) = 0$. Dazwischen (z.B. für $x = 0$) ist die Ableitung positiv, ausserhalb (z.B. für $x = -\pi/2$) negativ. Somit: $f(x)$ ist streng monoton wachsend für $x \in (-\pi/4, 3\pi/4)$ und streng monoton fallend für $x \in [-\pi, \pi]\backslash[-\pi/4, 3\pi/4]$.

(iii) $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$ ergibt $\cos(x) = 0$, i.e. $x = \pm\pi/2$. Mit $f'''(\pm\pi/2) \neq 0$ befinden sich die Wendepunkte bei, i.e. $x = \pm\pi/2$.

Aufgabe 5: Licht von einer Quelle A wird an einem ebenen Spiegel reflektiert und trifft im Detektor im Punkt B ein. Man zeige dass aus dem Prinzip von Fermat folgt, dass der Einfallswinkel θ_1 gleich dem Reflexionswinkel θ_2 sein muss.



Hinweise:

(i) Das Prinzip von Fermat besagt dass sich Licht entlang dem Weg ausbreitet, welcher die Zeit die das Licht für den Weg benötigt minimiert.

(ii) Mögliches Vorgehen: Man lege die reelle Achse auf die Spiegelfläche, so dass unterhalb des Punktes A der Ursprung zu liegen kommt und formuliere das Problem mit Hilfe der Position x des Reflexionspunktes.

Lösung. Die Zeit welche das Licht von A nach B benötigt ist

$$T = \frac{1}{c}(s_1 + s_2),$$

wobei wir mit c die Lichtgeschwindigkeit und mit s_1, s_2 die Weglänge vor und nach der Reflexion bezeichnen. Seien d_A, d_B die Abstände von A, B zum Spiegel und sei x die Distanz zwischen dem Punkt senkrecht unter A und dem Reflexionspunkt. Sei L der horizontale Abstand der Punkte A und B. Dann gilt

$$T(x) = \frac{1}{c}\left(\sqrt{d_A^2 + x^2} + \sqrt{d_B^2 + (L-x)^2}\right).$$

Wir haben

$$\frac{dT}{dx}(x) = \frac{1}{c}\left(\frac{x}{\sqrt{d_A^2 + x^2}} - \frac{L-x}{\sqrt{d_B^2 + (L-x)^2}}\right).$$

Aus $\frac{dT}{dx}(x) \stackrel{!}{=} 0$ folgt

$$\frac{x}{\sqrt{d_A^2 + x^2}} = \frac{L-x}{\sqrt{d_B^2 + (L-x)^2}}.$$

Ausgedrückt durch θ_1, θ_2 ergibt sich

$$\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2),$$

i.e. $\theta_1 = \theta_2$.

Aufgabe 6: Der Punkt mit Koordinaten $(\pi, 2\pi)$ liegt auf der Kurve in der x-y-Ebene, welche gegeben ist durch

$$y\sin(y) = x\sin(x)\,.$$

Ein weiterer Punkt auf dieser Kurve besitzt die Koordinaten $(\pi + 0.1, y_0)$. Man finde eine Approximation von y_0.

Hinweise:

(i) Die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ kann durch implizites Ableiten gefunden werden.
(ii) Die Approximation $y_0 \approx 2\pi$ ist zu grob.
(iii) Für eine Angabe des Resultats als Dezimalzahl kann $\pi = 3.14$ verwendet werden.

Lösung. Die Kurve ist in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) = (\pi, 2\pi)$ approximativ durch ihre Tangente gegeben. I.e. es gilt approximativ

$$y_0 \approx 2\pi + \frac{dy}{dx}(x - x_0)\,,$$

wobei die Ableitung durch implizites Ableiten der Kurve im gegebenen Punkt ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos(x) + \sin(x)}{y\cos(y) + \sin(y)}$$

Mit $(x, y) = (\pi, 2\pi)$ eingesetzt ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}.$$

Somit ist die Tangentengleichung

$$y = 2\pi - \frac{1}{2}(x - \pi)$$

und es gilt approximativ

$$y_0 \approx 2\pi - \frac{1}{2} \cdot 0.1 \approx 2 \cdot 3.14 - 0.05 = 6.23.$$

Aufgabe 7: Die *symmetrische Ableitung* einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist definiert durch

$$f_s(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}\,.$$

Es sei

$$f(x) = |x-3| + 1\,.$$

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

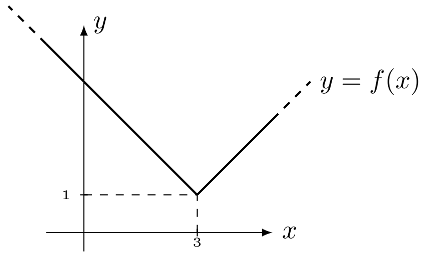
(i) Man skizziere den Graphen $y = f(x)$.

(ii) Man erkläre wieso $f'(3)$ nicht existiert.

(iii) Man bestimme $f_s(3)$.

Lösung.

(i)



(ii) Wir betrachten die Definition der Ableitung

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich 1 wenn eine Folge von h-Werten mit $h > 0$ betrachtet wird. Umgekehrt ist sie gleich -1, wenn eine Folge von h-Werten mit $h < 0$ betrachtet wird. I.e. der Grenzwert und somit die Ableitung an der Stelle $x_0 = 3$ existieren nicht.

Eine andere Möglichkeit ist die Argumentation mit Hilfe der Interpretation der Ableitung $f'(x_0)$ als Steigung der Tangente an den Graphen $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Da der Graph im Punkt $(3,1)$ eine 'Ecke' aufweist, existiert die Tangente in diesem Punkt nicht und somit ist auch die Steigung dort nicht definiert.

(iii) Wir haben

$$f_s(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{2h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$