ANALYSIS 2
VERSION 10. Februar 2026

LISIBACH ANDRÉ

1. Integralrechnung

1.1. **Motivation.** Abschnitt 1.1.1 motiviert den Begriff der Stammfunktion, Abschnitt 1.1.2 motiviert den Begriff des bestimmten Integrals.

1.1.1. *Physikalische Motivation: Kinematik.* Sei $f(t)$ die Position eines Körpers zur Zeit t. Im Abschnitt zur Differentialrechnung haben wir gesehen dass die Geschwindigkeit $v(t)$ gegeben ist durch[1]

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t)$$

und die Beschleunigung gegeben ist durch

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t).$$

Bei gegebener Position $f(t)$ erlauben es die obigen Gleichungen somit die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Körpers zu berechnen.

Ein natürliches Problem ist die Umkehrung dieser Berechnungen, i.e. die Berechnung der Position aus gegebener Geschwindigkeit oder die Berechnung der Geschwindigkeit aus gegebener Beschleunigung. Diese Berechnungen finden ihre Anwendung in der Praxis, da in vielen Situationen eine bekannte Kraft $F(t)$ auf einen Körper einwirkt (zum Beispiel die Gravitationskraft). Mit dieser bekannten Kraft ist die Beschleunigung durch das Newtonsche Bewegungsgesetz ($F = ma$) gegeben:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}$$

(hier ist m die Masse des betrachteten Körpers) und durch Umkehrung der Ableitung lässt sich die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Position $f(t)$ berechnen. Die Umkehrung der Ableitung ist das Bestimmen einer *Stammfunktion*.

Die Kinematik ist bei weitem nicht das einzige Anwendungsgebiet der Integralrechnung. Die meisten physikalischen Gesetze sind gegeben durch Differentialgleichungen, i.e. in diesen Gleichungen treten die Ableitungen der gesuchten Funktionen auf. Die Umkehrung der Ableitung ist somit zentral zur Berechnung der Lösungen dieser Gleichungen.

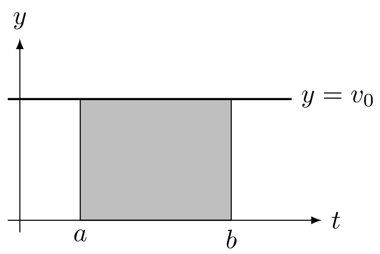
1.1.2. *Geometrischer Zusammenhang.* Wir stellen einen Zusammenhang her zwischen der obigen kinematischen Motivation und einem geometrischen Problem. Wir betrachten einen Körper der sich in einer Dimension mit konstanter Geschwindigkeit $v(t) = v_0 =$ konst. bewegt. Der zurückgelegte Weg zwischen der Zeit $t = a$ und $t = b$ ist gegeben durch

$$\text{Zurückgelegter Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeitdifferenz}$$

[1] Dies ist die Definition der Geschwindigkeit im Falle einer Bewegung in einer Dimension. In mehreren Dimensionen ist die Position beschrieben durch $\vec{r}(t)$ und die Geschwindigkeit definiert durch $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$.

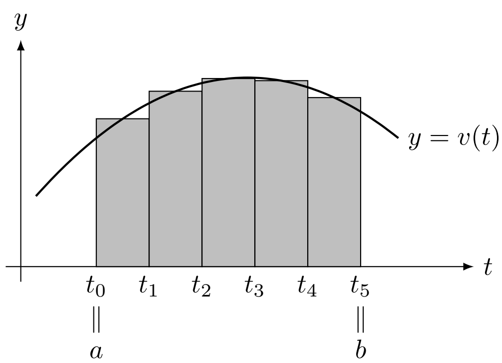
$$= v_0(b-a).$$

Betrachten wir den Graphen der Funktion $y = v(t) = v_0$ dann entspricht der zurückgelegte Weg der Fläche zwischen der t-Achse und dem Graphen der Funktion $y = v_0$, horizontal begrenzt durch $a \leq t \leq b$:



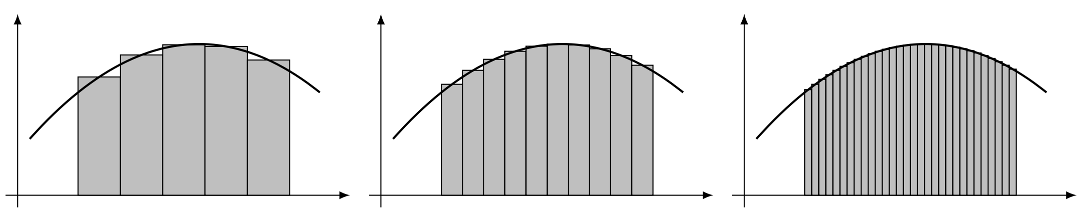
Nun betrachten wir eine Situation in welcher die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers nicht konstant ist. Die obige einfache Formel zur Berechnung des zurückgelegten Weges zwischen den Zeitpunkten $t = a$ und $t = b$ ist nicht mehr direkt anwendbar. Die folgende Idee führt zu einer approximativen Berechnung des zurückgelegten Weges: Man unterteilt den betrachteten Zeitabschnitt $[a, b]$ in Teilabschnitte und nimmt in jedem Teilabschnitt die Geschwindigkeit als konstant an. In jedem Teilabschnitt ist die obige Formel zur Berechnung des zurückgelegten Weges anwendbar.

Geometrisch betrachtet entspricht diese Approximation des zurückgelegten Weges der Fläche zusammengesetzt aus Rechtecken, deren Grundseite auf der t-Achse liegt und deren Höhe durch den als konstant gewählten Wert der Geschwindigkeit im jeweiligen Intervall gegeben ist:



(In dieser Grafik wurde das Intervall $[a, b]$ in fünf Teilintervalle $[t_{i-1}, t_i]$ mit $i = 1, \ldots, 5$ unterteilt und der konstante Funktionswert in den Intervallen wurde durch die Auswertung der Funktion $v(t)$ jeweils in der Mitte der Teilintervalle bestimmt).

Je grösser man die Anzahl Teilintervalle wählt, desto besser wird die Approximation des zurückgelegten Weges.



Die Approximation nähert sich der Fläche unter dem Graphen von $y = v(t)$, somit entspricht der zurückgelegte Weg also dieser Fläche[2]. Die Berechnung der Fläche unter dem Graphen einer Funktion ist die Berechnung des *bestimmten Integrals*[3].

Wir haben bis zu diesem Punkt die beiden Begriffe Stammfunktion und bestimmtes Integral motiviert. Das Auffinden einer Stammfunktion entspricht der Umkehrung der Ableitung und die Berechnung des bestimmten Integrals entspricht der Berechnung der Fläche unter der Kurve des Graphen der Funktion. Wir haben aber gesehen dass in der physikalischen Anwendung der Kinematik beides der Berechnung des Weges (oder Position, was in den obigen Beispielen das gleiche ist) aus einer gegebenen Geschwindigkeit entspricht. Somit ist klar dass die Stammfunktion und das bestimmte Integral eng miteinander verknüpft sind. Diese Verknüpfung wird durch den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung hergestellt.

[2] Wir weisen darauf hin dass im Allgemeinen der zurückgelegte Weg und die Position eines Körpers nicht übereinstimmen. Dies sieht man am Beispiel eines Oszillators, dessen Position am Anfang und am Ende einer Schwingungsperiode gleich sind (zum Beispiel der Nulllage entsprechen), welcher aber durch die Schwingungsbewegung während der Periode einen Weg zurückgelegt hat.

[3] Dies ist nur korrekt wenn man Flächen unterhalb der t-Achse mit negativem Vorzeichen gewichtet (siehe später).

Aufgaben

Aufgabe 1

Man finde die Menge aller Stammfunktionen für:

(i) $f(x) = 4$
(ii) $f(x) = 4x$
(iii) $f(x) = 2x + 7$
(iv) $f(x) = \frac{1}{2x}$
(v) $f(x) = 8x^7$
(vi) $f(x) = e^{4x}$
(vii) $f(x) = x^n$
(viii) $f(x) = -\cos(x) + \sin(x)$
(ix) $f(x) = \cos(2x)$

Aufgabe 2

Man bestimme zu den folgenden Funktionen eine Stammfunktion.
(i) $f(x) = \sin(\pi x)$
(ii) $x(f) = f^6$
(iii) $h(t) = e^{-2t}$
(iv) $\sigma(v) = \cos(v/3)$

Aufgabe 3

Man bestimme zu den folgenden Funktionen eine Stammfunktion (Hinweis: Für (iii) benutze man $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

(i) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
(ii) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
(iii) $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$
(iv) $f(x) = e^{1-x}$

Aufgabe 4

Man bestimme eine Stammfunktion der Betragsfunktion $f(x) = |x|$.

Aufgabe 5

Ein Körper habe zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v(0) = v_0$ und Position $s(0) = s_0$. Es gelte $a(t) = a = \text{konst}$. Man bestimme die Position in Abhängigkeit der Zeit, i.e. $s(t)$.

Aufgabe 6

Ein Massenpunkt sei zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $s_0 = 3$ und habe die Geschwindigkeit $v_0 = 5$. Man bestimme seine Position in Abhängigkeit der Zeit wenn er mit $a(t) = 2 + t - \frac{1}{2}t^2$ beschleunigt wird.

Aufgabe 7

Die Beschleunigung eines Körpers sei $a(t) = e^{\frac{1}{2}t}$. Zur Zeit $t = 0$ hat der Körper die Geschwindigkeit $v_0 = 3$ und die Position $s_0 = 0$. Man finde $s(t)$.

Aufgabe 8

Die Position eines Körpers sei gegeben durch $s(t) = 2e^{-t} + 2t^3 + 3t^2 + 1$.

(i) Man berechne den Ruck (Ableitung der Beschleunigung) zur Zeit $t = 0$ und $t = 3$.
(ii) Man schreibe die Ausdrücke für die die Position $s(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ mit Einheiten.

Aufgabe 9

Ein Körper erfährt die Beschleunigung $a = -2$. Welchen Weg legt er in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 3$ zurück, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1$ und die Anfangsposition $s_0 = 16$ beträgt. Hinweis: Der zurückgelegte Weg entspricht nicht direkt der Position $s(t)$.

Aufgabe 10

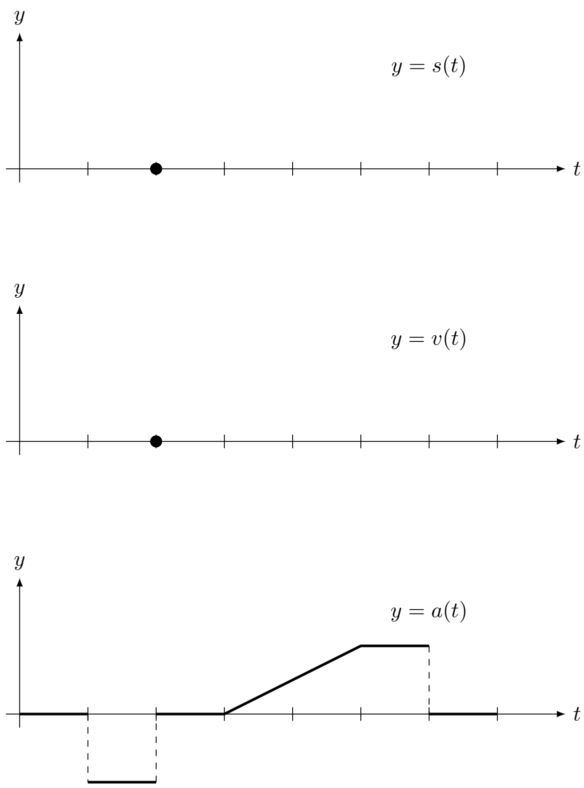
Es sei der Ruck $r(t) = r_0 =$ konst. gegeben. Weiter gelte $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ und $a(0) = a_0$. Man bestimme die Position $s(t)$.

Aufgabe 11

Ein Körper erfährt die Beschleunigung $a(t) = t^2$. Es gelte $s(0) = 11/12$, $s(1) = 2$. Man bestimme $s(t)$.

Aufgabe 12

Zu dem gegebenen Beschleunigungsverlauf $y = a(t)$ zeichne man qualitativ den Verlauf der Geschwindigkeit $y = v(t)$ und der Position $y = s(t)$, durch die gegebenen Punkte.



Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

Es gilt jeweils $C \in \mathbb{R}$.

(i) $F(x) = 4x + C$
(ii) $F(x) = 2x^2 + C$
(iii) $F(x) = x^2 + 7x + C$
(iv) $F(x) = \frac{1}{2}\log(x) + C$
(v) $F(x) = x^8 + C$
(vi) $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x} + C$
(vii) $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
(viii) $F(x) = -\sin(x) - \cos(x) + C$
(ix) $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

Lösung zu Aufgabe 2

(i) $F(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + C$
(ii) $X(f) = \frac{1}{7}f^7 + C$
(iii) $H(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$
(iv) $\Sigma(v) = 3\sin(v/3) + C$

Lösung zu Aufgabe 3

(i) $F(x) = \log(x+1) + C$
(ii) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + C$
(iii) $F(x) = \frac{1}{2}\arctan(2x) + C$
(iv) $F(x) = -e^{1-x} + C$

Lösung zu Aufgabe 4

Wir benutzen die Definition der Betragsfunktion, i.e.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Wir erhalten somit für die Stammfunktion

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} -x^2/2 & \text{für } x < 0, \\ x^2/2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}x|x|. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5

$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$.

Lösung zu Aufgabe 6

$s(t) = -\frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + t^2 + 5t + 3$.

Lösung zu Aufgabe 7

$s(t) = 4e^{\frac{1}{2}t} + t - 4$.

Lösung zu Aufgabe 8

(i) Wir bezeichnen den Ruck mit $r(t)$. $r(0) = 10$, $r(3) = 12 - 2e^{-3}$.

(ii) $s(t) = 2e^{-t\mathrm{s}^{-1}}\mathrm{m} + 2t^3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} + 3t^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 1\mathrm{m},$
$v(t) = -2e^{-t\mathrm{s}^{-1}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 6t^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} + 6t\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
$a(t) = 2e^{-t\mathrm{s}^{-1}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 12t\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} + 6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$

Lösung zu Aufgabe 9

Wir haben $s(t) = -t^2 + t + 16$. Dies ist die Position in Abhängigkeit der Zeit. Aufgetragen als Funktion ist es eine nach unten geöffnete Parabel. Der Körper bewegt sich somit zuerst nach oben bis zum Scheitelpunkt der Bewegung und danach wieder nach unten. Der Scheitelpunkt befindet sich bei $s(1/2) = 16.25$ und wir haben $s(3) = 10$. Der zurückgelegte Weg ist somit gleich 6.5.

Lösung zu Aufgabe 10

$s(t) = \frac{1}{6}r_0t^3 + \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + s_0.$

Lösung zu Aufgabe 11

$s(t) = \frac{1}{12}t^4 + t + 11/12.$

Lösung zu Aufgabe 12

Man beachte dass der Anstieg im $v(t)$-Verlauf quadratisch und im $s(t)$-Verlauf zuerst kubisch (für zwei Zeiteinheiten) und dann quadratisch ist.