PRÜFUNG ANALYSIS 2
2. APRIL 2024
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Total
Punkte	3	3	3	3	3	15

Aufgabe 1: Man bestimme die folgenden Integrale:

(i)
$$\int_0^2 (3x^2 + x - 5)\,dx$$

(ii)
$$\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx$$

(iii)
$$\int_3^1 \sqrt{\pi}\,dx$$

(iv)
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\sin(2x)\,dx$$

(v)
$$\int_0^{\log(2)} \frac{1}{e^{3x}}\,dx$$

(vi)
$$\int_2^{\infty} \frac{1}{10t^3}\,dt$$

Lösung 1:

(i)
$$\int_0^2 (3x^2 + x - 5)dx = \left(-5x + \frac{x^2}{2} + x^3\right)\Bigg|_0^2 = 0,$$

(ii)
$$\int_1^4 3\sqrt{x}dx = 2x^{3/2}\Big|_1^4 = 14.$$

(iii)
$$\int_3^1 \sqrt{\pi}dx = -2\sqrt{\pi}.$$

(iv)
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\sin(2x)dx = 0.$$

(v)
$$\int_0^{\log(2)} e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\log(2)} = \frac{7}{24}.$$

(vi)
$$\int_2^{\infty} \frac{1}{10t^3}\,dt = -\frac{1}{20}t^{-2}\Big|_2^{\infty} = -\frac{1}{20}2^{-2} = \frac{1}{80}.$$

Aufgabe 2: Man bestimme die folgenden Integrale:

(i)

$$\int \left(\frac{15}{x^2} - 5x\right) \cos\left(\frac{6}{x} + x^2\right) dx$$

(ii)

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} dx$$

Lösung 2:

(i) Die Substitution

$$u = \frac{6}{x} + x^2$$

ergibt

$$\int \left(\frac{15}{x^2} - 5x\right) \cos(u) \frac{du}{-\frac{6}{x^2} + 2x} = -\frac{5}{2} \int \cos(u) du = -\frac{5}{2} \sin(u) + C = -\frac{5}{2} \sin\left(\frac{6}{x} + x^2\right) + C.$$

(ii) Polynomdivision ergibt

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 2x + 1}.$$

Die ersten beiden Terme sind elementar integrierbar. Partialbruchzerlegung für den zweiten Term führt auf

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Somit ist das Integral

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \log(x - 1) - \frac{1}{1 - x} + C.$$

Aufgabe 3: Ein Körper besitzt die folgende Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit:

$$v(t) = 10 \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right).$$

(wir lassen die Einheiten weg).

(i) Man bestimme die Beschleunigung $a(t)$.

(ii) Man bestimme die Position $s(t)$, unter der Bedingung dass $s(0) = -1$.

(iii) Man bestimme den zurückgelegten Weg zwischen den Zeiten $t_1 = 0$ und $t_2 = \frac{2\pi}{5}$.

Lösung 3:

(i) Wir haben

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 50 \cos(5t + \pi/3).$$

(ii) Wir haben

$$s(t) = \int v(t')dt' + C = -2 \cos(5t + \pi/3) + C.$$

Die Bedingung $s(0) = -1$ ist

$$s(0) = -2 \cos(\pi/3) + C = -1 + C \stackrel{!}{=} -1.$$

Somit folgt $C = 0$ und der Weg in Abhängigkeit der Zeit ist

$$s(t) = -2 \cos(5t + \pi/3).$$

(iii) Wir haben

$$s(0) = s(2\pi/5).$$

Jedoch wurde eine ganze Periode der Bewegung durchlaufen. Bei einer Amplitude von 2 (siehe (ii)) folgt dass der zurückgelegte Weg gerade viermal die Amplitude, also 8 beträgt.

Aufgabe 4: Wir betrachten die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & -2 \le x < 0, \\ 2 - \frac{2}{3}x & 0 \le x \le 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Man bestimme

$$\int_{-2}^{4} (4 - f(x))dx$$

aus bekannten Flächen.

(ii) Man bestimme

$$\int_{0}^{3} f(x)dx$$

als Grenzwert einer Folge von Riemannschen Obersummen.

Hinweis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung 4:

(i) Die Fläche welche dem Integral entspricht ist ein Rechteck minus ein Viertelkreis minus ein Dreieck:

$$\int_{-2}^{4} (4 - f(x))dx = 6 \cdot 4 - \frac{2^2\pi}{4} - \frac{3 \cdot 2}{2} = 21 - \pi.$$

(ii) Die Obersumme ist gegeben durch

$$\overline{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i),$$

wobei

$$b = 3, \quad a = 0.$$

Da die Funktion monoton fallend ist müssen die ξ_i's jeweils am linken Rand der Teilintervalle gewählt werden:

$$\xi_i = (i-1)\frac{3}{n}.$$

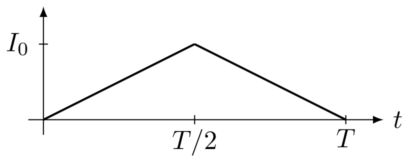
Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \overline{S}_n = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left((i-1)\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{n}(i-1)\right)\right) &= \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(2 - \frac{2}{n}i + \frac{2}{n}\right) \\ &= \frac{3}{n}\left(2n - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + 2\right) \\ &= 6 + \frac{6}{n} - \frac{6}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

und somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = 3.$$

Aufgabe 5: Wir lassen im folgenden die Einheiten weg. Die Funktion $I(t)$ beschreibe einen zeitabhängigen Strom welcher T-periodisch und zwischen $t = 0$ und $t = T$ folgendermassen gegeben ist:



Hier ist I_0 eine gegebene Konstante.

(i) Der Strom $I(t)$ fliesse durch einen Kondensator mit Kapazität C. Man skizziere qualitativ die Spannung am Kondensator $U(t)$ für $t \in [0, 2T]$ wenn der Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ entladen ist.

(ii) Sei $T = 4$, $I_0 = 2$ und $C = 1$. Man bestimme die maximale Spannung am Kondensator.

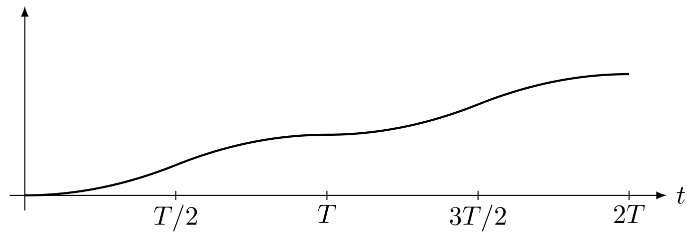
Hinweis: Für einen Kondensator gilt: $CU(t) = Q(t)$, wobei wir mit $Q(t)$ die Ladung auf dem Kondensator bezeichnen und der Zusammenhang zum Strom ist durch $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$ gegeben.

Lösung 5:

(i) Wir haben

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int I(t)dt.$$

Die auftretende Konstante ist durch die Anfangsbedingung $Q(0) = 0$ gegeben. Grafisch und qualitativ:



(ii) Das Integral entspricht, bis auf die Konstante $1/C = 1$, der Fläche zwischen dem Graphen $y = I(t)$ und der t-Achse. I.e.

$$U(2T) = \frac{1}{C} \frac{2TI_0}{2} = 8.$$