PRÜFUNG ANALYSIS 2
22. MAI 2024
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Total
Punkte	4	4	4	4	4	20

Aufgabe 1: Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = x^2y + 2xy^3 + x + 1\,.$$

(i) Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen $z = f(x,y)$ im Punkt mit x-y-Koordinaten $(x,y) = (1,1)$.

(ii) Man bestimme im Punkt aus (i) die Richtung, in welche die Funktion am stärksten ansteigt und bestimme die dazugehörige Steigung.

(iii) Man bestimme eine Gleichung der Tangente an die Höhenlinie im Punkt aus (i).

Lösung 1:

(i) Wir haben

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2y^3 + 1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy^2$$

Somit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 5 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 7\,.$$

Zusammen mit $f(1,1) = 5$ ist die Gleichung der Tangentialebene

$$z - 5 = 5(x-1) + 7(y-1)\,.$$

(ii) Wir haben

$$\vec{\nabla} f(1,1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}\,.$$

Somit ist die Richtung gegeben durch den Einheitsvektor

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{74}} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und die Steigung in diese Richtung ist

$$|\vec{\nabla} f(1,1)| = \sqrt{74}\,.$$

(iii) Der Gradient steht senkrecht auf den Höhenlinien. Ein Normalenvektor zur gesuchten Tangente ist somit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Geradengleichung

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0\,,$$

gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

I.e.

$$5x + 7y = 12\,.$$

Aufgabe 2:

(i) Die Gleichung

$$yz^2 - \log(z) = x^2 + \sin^2(y)$$

definiert z implizit als Funktion von x und y. Man finde $\frac{\partial z}{\partial x}$.

(ii) Sei $F(x, y, z)$ eine gegebene Funktion. Die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

definiert z implizit als Funktion von x und y. Man zeige dass gilt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\,.$$

Lösung 2:

(i) Ableiten der gegeben Gleichung nach x ergibt

$$2yz\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,.$$

Somit haben wir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2yz - \frac{1}{z}}\,.$$

(ii) Wir leiten die Gleichung $F(x, y, z(x, y)) = 0$ nach x ab (wir lassen die Argumente weg):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,.$$

Daraus folgt die Gleichung welche zu zeigen ist.

Aufgabe 3: Die Kreisfrequenz eines Pendels der Länge L welches von der Decke herunterhängt ist gegeben durch

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

Hier ist g die Gravitationskonstante. Wir lassen im folgenden die Einheiten weg. Mit $g = 10$ und $L = 0.1$ ergibt sich $\omega = 0.1$. Man bestimme ω approximativ für $L = 0.13$ und $g = 9.81$ mit Hilfe der linearen Approximation.

Lösung 3: Wir linearisieren die Funktion

$$\omega(L, g) = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

an der Stelle $(L_0, g_0) = (0.1, 10)$. Wir haben $\omega(0.1, 10) = 0.1$ und

$$\frac{\partial \omega}{\partial L} = \frac{1}{2\sqrt{Lg}}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial g} = -\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{g}^3}\,.$$

Somit

$$\frac{\partial \omega}{\partial L}(0.1, 10) = \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial g}(0.1, 10) = -\frac{1}{200}\,.$$

Mit $\Delta L = 0.03$, $\Delta g = -0.19$ folgt

$$\Delta\omega \approx \frac{0.03}{2} + \frac{0.19}{200} = \frac{3.19}{200} = \frac{15.95}{1000} = 0.01595.$$

und somit

$$\omega \approx 0.1 + 0.01595 = 0.11595\,.$$

Aufgabe 4:

(i) Man bestimme den Mittelwert der Funktion

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

im Gebiet $[0,2] \times [0,2]$.

(ii) Man bestimme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{|x|}^{\pi} \frac{\sin(y)}{y} dy dx \,.$$

Hinweis: Man vertausche die Integrationsreihenfolge.

Lösung 4:

(i)

$$\overline{f} = \frac{1}{4} \int_0^2 \int_0^2 \left((x-1)^2 + (y-1)^2\right) dx dy = \ldots = \frac{2}{3} \,.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|x|}^{\pi} \frac{\sin(y)}{y} dy dx &= \int_0^{\pi} \int_{-y}^{y} \frac{\sin(y)}{y} dx dy \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{y} x \Big|_{-y}^{y} dy \\ &= \int_0^{\pi} 2\sin(y) dy = -2\cos(y) \Big|_0^{\pi} = 4 \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = y - \frac{1}{x} \,.$$

(i) Man skizziere Höhenlinien von $f(x,y)$.

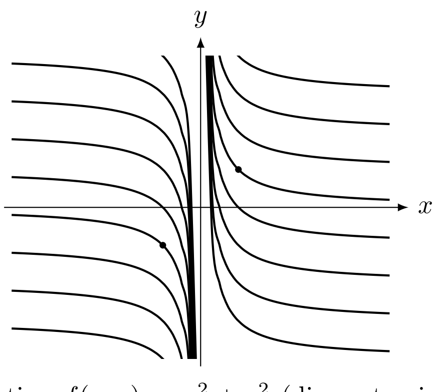
(ii) Man verwende die Methode der Lagrangemultiplikatoren um die Punkte auf der Kurve

$$f(x,y) = 0$$

zu finden, welche den kürzesten Abstand zum Ursprung haben.

Lösung 5:

(i) Wir schreiben $f(x,y) = y - \frac{1}{x} \overset{!}{=} C$ um als $y = \frac{1}{x} + C$. Somit sind die Höhenlinien vertikale Verschiebungen des Graphen $y = \frac{1}{x}$:



(ii) Wir minimieren die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ (dies entspricht dem Abstand zum Ursprung zum Quadrat) unter der Bedingung $g(x,y) = y - \frac{1}{x} = 0$. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \lambda \vec{\nabla} g \\ g &= 0 \end{aligned}$$

ist somit

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\lambda}{x^2} \\ 2y &= \lambda \\ y &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Die erste Gleichung dividiert durch die zweite ergibt $x^3 = y$. Eingesetzt in der dritten Gleichung ergibt $x^4 = 1$ mit Lösungen $x = \pm 1$. Die dazugehörigen y-Werte sind $y = \pm 1$ und somit sind die Lösungen

$$(1,1)\,, \qquad (-1,-1)\,,$$

siehe Punkte in der Grafik. Die Pärchen $(1,-1)$, $(-1,1)$ sind keine Lösungen (siehe dritte Gleichung).