ABSCHLUSSPRÜFUNG ANALYSIS 2
3. JULI 2024
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
Punkte	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	66

Aufgabe 1: Man bestimme die folgenden Integrale:

(i)
$$\int_1^2 \left(\frac{3}{x^3} + 2e^{2x}\right) dx$$

(ii)
$$\int_0^\pi \left(\pi^2 + 3\cos(x/3)\right) dx$$

(iii)
$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} + 2e^{-2x}\right) dx$$

Lösung 1:

(i)
$$\int_1^2 \left(3x^{-3} + 2e^{2x}\right) dx = \frac{9}{8} - e^2 + e^4$$

(ii)
$$\int_0^1 \left(\pi^2 + 3\cos(x/3)\right) dx = \pi^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(iii)
$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2e^{-2x}\right) dx = 2 + \frac{1}{e^2}$$

Aufgabe 2: Man bestimme die folgenden Integrale:

(i)
$$\int \frac{\sin(2t)}{\cos^3(2t)}\, dt$$

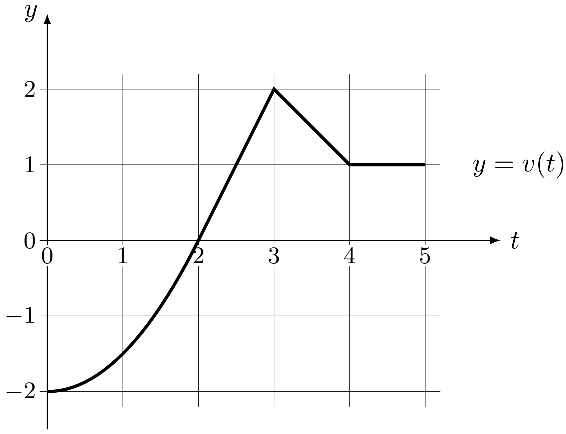
(ii)
$$\int \log(x)\, dx$$

Lösung 2:

(i) Mit der Substitution $u = \cos(2t)$ folgt
$$\int \frac{\sin(2t)}{\cos^3(2t)}\, dt = -\int \frac{\sin(2t)}{u^3}\frac{1}{2\sin(2t)} du = -\frac{1}{2}\int u^{-3} du = \frac{1}{4u^2} + C = \frac{1}{4\cos^2(2t)} + C\,.$$

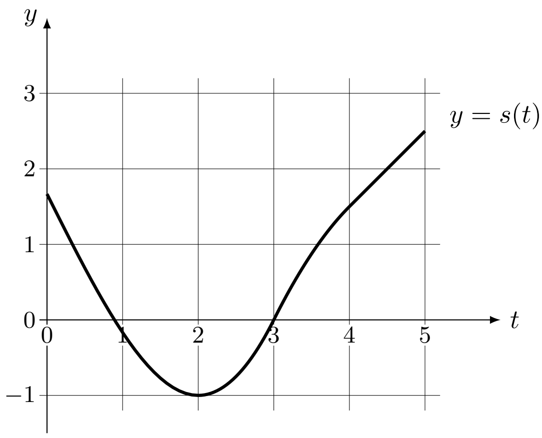
(ii) Mit partieller Integration ergibt sich
$$\int \log(x)\, dx = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\, dx = x\log(x) - x + C = x(\log(x) - 1) + C\,.$$

Aufgabe 3: Die folgende Grafik beschreibt die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit der Zeit t einer eindimensionalen Bewegung (Einheiten werden weggelassen):



(i) Man bestimme die Beschleunigung zur Zeit $t = 2$.
(ii) Man bestimme die mittlere Beschleunigung für den gezeigten Zeitbereich.
(iii) Man skizziere qualitiativ die Position in Abhängigkeit der Zeit $s(t)$ wenn bekannt ist dass $s(3) = 0$.

Lösung 3:
(i) $a(2) = 2$.
(ii) $\overline{a} = \frac{1}{5}(v(5) - v(0)) = \frac{3}{5}$.
(iii)



Aufgabe 4: Wir betrachten die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} |x| & -2 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Gebiet begrenzt durch den Graphen $y = f(x)$ und die x-Achse wird um $x = -3$ rotiert. Man bestimme das Volumen des entstandenen Körpers.

Lösung 4: Wir haben

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Körper mit Grundfläche Kreisring}} - V_{\text{rotierte Pyramide}} \\ &= 5^2\pi \cdot 2 - 1^2\pi \cdot 2 - \pi \int_0^2 \left((y+3)^2 - (-y+3)^2\right) dy \\ &= 50\pi - 2\pi - \pi \int_0^2 12y \, dy \\ &= 48\pi - 24\pi \end{aligned}$$

$$= 24\pi\,.$$

Aufgabe 5: Man bestimme das folgende Integral als Grenzwert einer Riemannschen Untersumme:

$$\int_0^1 (x-2)dx\,.$$

Hinweis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Lösung 5: Für Untersumme wählen wir die ξ_i's am linken Rand:

$$\xi_i = \frac{i-1}{n}\,, \qquad i = 1, \dots, n\,.$$

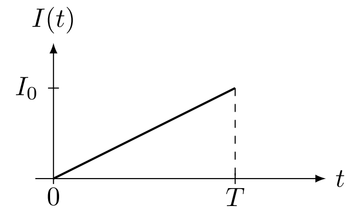
Die Riemannsche Summe ist

$$\begin{aligned} S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}-2\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} - 2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} - 2\,. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\int_0^1 (x-2)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}\,.$$

Aufgabe 6: Wir lassen im folgenden die Einheiten weg. Die Funktion $I(t)$ beschreibe einen zeitabhängigen Strom welcher T-periodisch und zwischen $t=0$ und $t=T$ folgendermassen gegeben ist:



Hier ist I_0 eine gegebene Konstante.

Man bestimme den Gleichstrom I_{eff}, welcher im zeitlichen Mittel die selbe Leistung an einen Ohmschen Widerstand mit $R=1$ abgibt wie $I(t)$.

Hinweis:
Die Leistung P ist gegeben durch $P = I^2R$ und die an den Ohmschen Widerstand während einer Periode T abgegebene Arbeit bei konstanter Leistung P ist gegeben durch $W = PT$.

Lösung 6: Wir haben

$$I(t) = \frac{I_0}{T}t\,.$$

Somit ist die mittlere Leistung

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)^2 R dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_0^2}{T^2}t^2 dt = \frac{I_0^2}{3}\,.$$

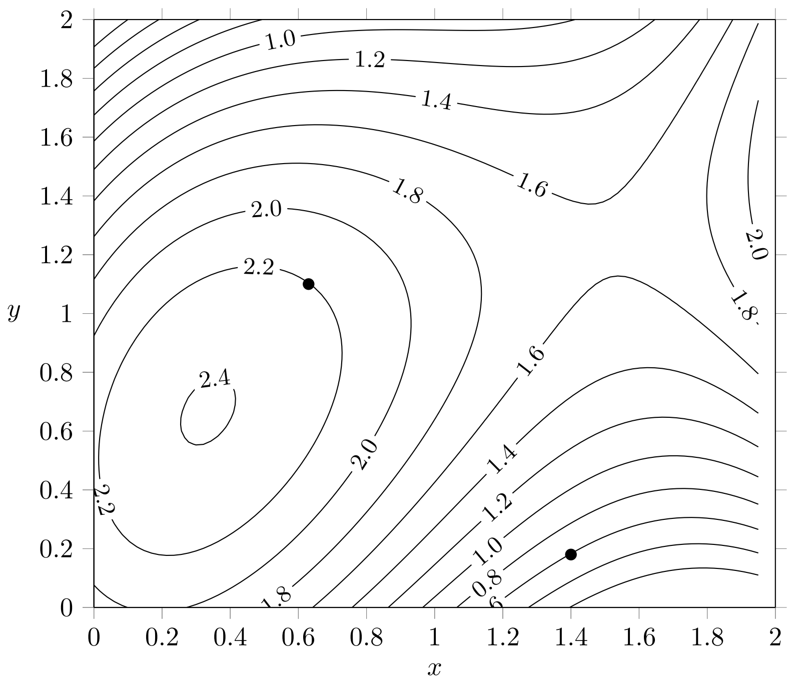
Mit der Forderung

$$\overline{P} \stackrel{!}{=} P_{DC} = I_{\text{eff}}^2 R = I_{\text{eff}}^2$$

folgt somit

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{3}}\,.$$

Aufgabe 7: Die folgende Grafik zeigt Höhenlinien einer Funktion $f(x, y)$:



Die Zahlen auf den Höhenlinien entsprechen dem Wert der Funktion entlang dieser Höhenlinie.

(i) Man skizziere qualitativ die Schnittkurve $x = 0.5$ des Grafen $z = f(x, y)$.

(ii) Man skizziere qualitativ die Schnittkurve $y = 1.5$ des Grafen $z = f(x, y)$.

(iii) Man zeichne in der Grafik in den beiden gegebenen Punkten den Gradienten qualitativ (Richtung und Länge) ein.

Lösung 7:

Aufgabe 8: Man finde und klassifiziere alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) = (y - 2)x^2 - y^2\,.$$

Lösung 8:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} (y-2)2x \\ x^2 - 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt die kritischen Punkte

$$(0, 0) \qquad (2, 2) \qquad (-2, 2)\,.$$

Mit

$$f'' = \begin{pmatrix} 2(y-2) & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad f''(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad f''(-2,2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mit den entsprechenden Eigenwerten folgt:

Relatives Maximum bei $(0,0)$,
Sattelpunkte bei $(2,2)$ und $(-2,2)$.

Aufgabe 9: Die Kreisfrequenz eines Pendels der Länge L welches von der Decke herunterhängt ist gegeben durch

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Hier ist g die Gravitationskonstante. Wir lassen im folgenden die Einheiten weg. Mit $g = 10$ und $L = 0.1$ ergibt sich $\omega = 0.1$. Man bestimme ω approximativ für $L = 0.13$ und $g = 9.81$ mit Hilfe der linearen Approximation.

Lösung 9: Wir linearisieren die Funktion

$$\omega(L,g) = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

an der Stelle $(L_0, g_0) = (0,1,10)$. Wir haben $\omega(0.1, 10) = 0.1$ und

$$\frac{\partial \omega}{\partial L} = \frac{1}{2\sqrt{Lg}}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial g} = -\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{g}^3}.$$

Somit

$$\frac{\partial \omega}{\partial L}(0.1, 10) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial g}(0.1, 10) = -\frac{1}{200}.$$

Mit $\Delta L = 0.03$, $\Delta g = -0.19$ folgt

$$\Delta\omega \approx \frac{0.03}{2} + \frac{0.19}{200} = \frac{3.19}{200} = \frac{15.95}{1000} = 0.01595.$$

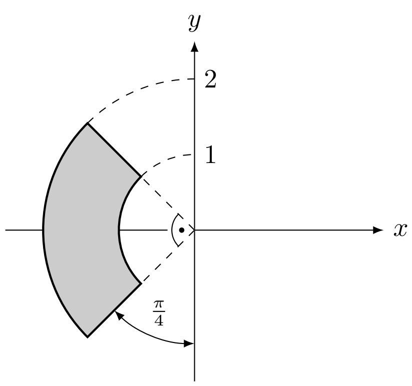
und somit

$$\omega \approx 0.1 + 0.01595 = 0.11595.$$

Aufgabe 10: Man integriere die Funktion

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

im skizzierten grauen Bereich:



Lösung 10: $-9\pi/8$

Aufgabe 11: Man löse die Gleichung

$$2\sqrt{1+x} = 3\sin(x) + \cos(x)$$

für kleine x, i.e. $x \approx 0$, indem man beide Seiten der Gleichung durch Taylorpolynome zweiter Ordnung approximiert.

Lösung 11: Wir haben die folgenden Taylorentwicklungen bis zur zweiten Ordnung:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\,, \qquad \sin(x) \approx x\,, \qquad \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Somit ist die Gleichung approximativ

$$2 + x - \frac{x^2}{4} \approx 3x + 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit Lösungen

$$x = 4 \pm 2\sqrt{3}\,.$$