MATHEMATIK 1
VERSION 28. Oktober 2026

LISIBACH ANDRÉ

Das Gewicht der Vorlesung liegt auf konkreten Rechnungen und weniger auf abstrakten Formulierungen. Deshalb befinden sich im Skript viele Rechenbeispiele und weitere werden im Unterricht besprochen. Wir benutzen Kursivschrift für Begriffsdefinitionen.

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

In den Analysisvorlesungen wurden (meist) gegebene Funktionen auf ihre Eigenschaften hin untersucht (analysiert). Beim Studium von Differentialgleichungen werden Gesetzmässigkeiten aus Physik, Ökonomie, Biologie usw. mathematisch formuliert und dazu Lösungen gesucht. Die Formulierungen sind in der Form von Differentialgleichungen, die Lösungen davon sind Funktionen welche die interessierenden Grössen, meist in Abhängigkeit der Zeit, beschreiben.

1.1. **Einführende Beispiele.** Ohne die auftretenden Begriffe im Detail zu erklären (siehe nachfolgenden Teilabschnitt), werden einfache Beispiele und Anwendungen betrachtet.

1.1.1. *Kinematik.* Wir betrachten eine eindimensionale Bewegung mit konstanter Beschleunigung und interessieren uns für die Position in Abhängigkeit der Zeit. Die Voraussetzung konstanter Beschleunigung ist beispielsweise beim freien Fall in Erdnähe in guter Näherung gegeben. Die Gesetzmässigkeit welche das kinematische Problem beschreibt ist

$$\frac{d^2s}{dt^2}(t) = a,$$

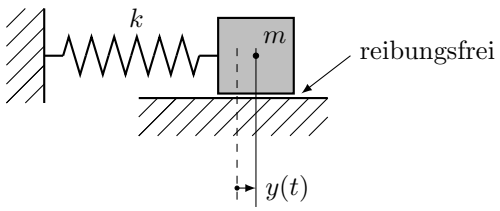
wobei wir mit $s(t)$ die Position in Abhängigkeit der Zeit t und mit a die konstante Beschleunigung bezeichnen. Daraus folgt durch zweifache unbestimmte Integration

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2,$$

wobei C_1, C_2 Integrationskonstanten sind. Mit den Anfangsbedingungen $s(0) = s_0$ (Position zum Zeitpunkt $t = 0$) und $v(0) = v_0$ (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$) folgt

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0.$$

1.1.2. *Dynamik.* Wir betrachten das mechanische System:



Wir bezeichnen mit m die Masse, mit k die Federkonstante und mit $y(t)$ die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage. Der Körper werde aus der Ruhelage ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Wir interessieren uns für die Auslenkung aus der Ruhelage in Abhängigkeit der Zeit. Die Gesetzmässigkeit welche dieses Problem beschreibt

Mathematik 1, Lisibach André

ist das Bewegungsgesetz von Newton, i.e. $F = ma$, wobei wir mit F die Kraft auf den Körper und mit a dessen Beschleunigung bezeichnen. Mit

$$F(t) = -ky(t), \qquad a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t),$$

folgt

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) = -Ky(t), \qquad \text{wobei} \qquad K = \frac{k}{m}.$$

Mögliche Lösungen dieser Gleichung sind

$$y(t) = C\sin(\sqrt{K}t)$$
$$y(t) = C\cos(\sqrt{K}t)$$
$$y(t) = C_1\cos(\sqrt{K}t) + C_2\sin(\sqrt{K}t),$$

wobei C, C_1, C_2 Konstanten sind. Diese möglichen Lösungen beschreiben harmonische Schwingungen. Die letzte davon, zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0, \qquad v(0) = \frac{dy}{dt}(0) = v_0 = 0$$

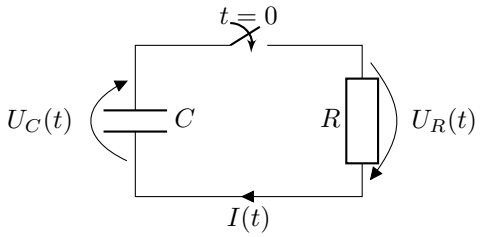
ergibt

$$y(t) = y_0\cos(\sqrt{K}t).$$

Allgemeiner, mit Anfangsgeschwindigkeit v_0:

$$y(t) = y_0\cos(\sqrt{K}t) + \frac{v_0}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}t).$$

1.1.3. *Elektrotechnik.* Wir betrachten die Schaltung:



Auf dem Kondensator befinde sich eine Ladung Q_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Wir interessieren uns für die Ladung Q auf dem Kondensator in Abhängigkeit der Zeit t. Die Gesetzmässigkeit zur Beschreibung der Situation ist die Kirchhoffsche Maschenregel:

$$U_C(t) + U_R(t) = 0.$$

Zusätzlich haben wir die Gesetze

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \qquad U_R(t) = RI(t).$$

Eingesetzt in obige Gleichung, zusammen mit $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$, erhalten wir

$$\frac{dQ}{dt}(t) = -\frac{1}{RC}Q(t).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$Q(t) = Q_0e^{-\frac{1}{RC}t},$$

welche auch die Anfangsbedingung $Q(0) = Q_0$ erfüllt.

1.2. **Grundbegriffe.**

1.2.1. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* der Ordnung n ist eine Gleichung in welcher eine unbekannte Funktion $y(x)$, ihre Ableitungen

Mathematik 1, Lisibach André

und die Variable x auftreten. Die *Ordnung* n ist die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung. Beispiele:[1]

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(x) &= -12y(x),\\
\frac{d^2y}{dx^2}(x) + 4\frac{dy}{dx}(x) + 2y(x)^2 &= \cos(x),\\
y''y' + yy' &= 0,\\
\sqrt{y^{(17)}} + \sin^2(y') &= x^4.
\end{aligned}$$

Diese vier Differentialgleichungen sind von der Ordnung 1, 2, 2 und 17.

Der Begriff *gewöhnlich* widerspiegelt den Fakt dass nur Funktionen von einer unbekannten Variablen (in den obigen Beispielen ist dies x, wenn es sich um dynamische Probleme handelt werden wir aber meist t (als Zeitvariable) verwenden) und somit auch nur (gewöhnliche) Ableitungen nach dieser Variable auftreten. Dies im Gegensatz zu den partiellen Differentialgleichungen, in welchen Funktionen von mehreren Variablen und somit partielle Ableitungen auftreten. Ein Beispiel für eine partielle Differentialgleichung ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Partielle Differentialgleichungen sind nicht Gegenstand der vorliegenden Betrachtungen.

Ist eine Differentialgleichung nach der höchsten auftretenden Ableitung aufgelöst, so spricht man von der *expliziten Darstellung*:

$$y^{(n)} = G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

wobei G eine gegebene Funktion ist. Beispiele dafür sind

$$\begin{aligned}
y' &= -4y,\\
y'' &= y' + 2y + x.
\end{aligned}$$

Andernfalls liegt die Gleichung in *impliziter Darstellung* vor. Oft lässt sich eine implizit gegebene Gleichung auf die explizite Form umschreiben, beispielsweise

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \qquad \text{auf} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

1.2.2. *Lösung.* Eine *Lösung* einer Differentialgleichung ist eine Funktion $y(x)$, welche die Differentialgleichung identisch, i.e. für alle x im betrachteten Intervall, erfüllt. Für eine gegebene Lösung wird dies durch Einsetzen überprüft. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung und Funktion

$$y' = x + y, \qquad y(x) = e^x - x - 1.$$

Einsetzen von $y(x)$ in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt

$$y' = e^x - 1.$$

Einsetzen von $y(x)$ in die rechte Seite der Differentialgleichung ergibt

$$x + y = x + e^x - x - 1 = e^x - 1.$$

[1] Wir weisen darauf hin dass im folgenden verschiedene Notationen für Funktionen und ihre Ableitungen verwendet werden. Auch werden oft die Argumente von Funktionen zur besseren Übersicht nicht notiert. Beispielsweise sind

$$\begin{aligned}
y' + y'' &= x,\\
\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} &= x,\\
\frac{dy}{dx}(x) + \frac{d^2y}{dx^2}(x) &= x
\end{aligned}$$

dieselben Differentialgleichungen.

Mathematik 1, Lisibach André

Die beiden erhaltenen Ausdrücke stimmen überein. Somit handelt es sich bei der gegebenen Funktion $y(x)$ um eine Lösung der Differentialgleichung. Bei dem betrachteten Intervall in diesem Beispiel handelt es sich um die gesamten reellen Zahlen.

1.2.3. *Allgemeine Lösung.* Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}(x) = x.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung finden wir durch unbestimmte Integration der rechten Seite:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wir sehen also dass für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = x$ ist. Das heisst dass wir unendlich viele Lösungen gefunden haben. Diese Erkenntnis gilt allgemein, i.e. eine gewöhnliche Differentialgleichung besitzt im Allgemeinen unendlich viele Lösungen. Die Menge aller Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird als *allgemeine Lösung* bezeichnet.

Die Differentialgleichung $y' = x$ ist ein Beispiel einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx}(x) = f(x),$$

wobei $f(x)$ eine gegebene Funktion ist. Wir sehen dass jede Stammfunktion $F(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Da sich zwei Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante unterscheiden, ergibt sich die allgemeine Lösung durch Wahl einer festen Stammfunktion $F(x)$ und Addition einer Konstanten

$$y(x) = F(x) + C.$$

Nicht immer führt die Addition einer Konstanten zu einer Lösung auf die allgemeine Lösung. Beispiel: Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}(x) = y(x).$$

besitzt die Lösung $y(x) = e^x$. Jedoch erfüllt $y(x) = e^x + C$ (mit $C \neq 0$) die Differentialgleichung nicht. Die allgemeine Lösung (siehe unten) ist gegeben durch

$$y(x) = Ce^x.$$

Was den beiden obigen Typen von Differentialgleichungen gemeinsam ist, ist die Tatsache dass die allgemeine Lösung eine Konstante enthält. Man sagt auch einen *Parameter*. Dies hängt damit zusammen dass die beiden Typen von Differentialgleichungen beide erster Ordnung sind. Wir betrachten nun die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = x.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich durch zweifache unbestimmte Integration zu

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2,$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind. Die betrachtete Differentialgleichung ist zweiter Ordnung und die zugehörige allgemeine Lösung hängt von zwei Konstanten ab.

Allgemein gilt dass die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung von n Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ abhängt. Das erste einführende Beispiel gibt für diesen Sachverhalt die physikalische Interpretation. In diesem Beispiel wird die Position in Abhängigkeit der Zeit gesucht, wenn man voraussetzt dass die Beschleunigung konstant ist. Die Lösung hängt von zwei Konstanten ab, der Position und der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$.

1.2.4. *Partikuläre Lösung.* Wir betrachten wieder die Differentialgleichung $y' = x$. Die allgemeine Lösung davon ist

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Sei nun für das betrachtete Problem die weitere Bedingung $y(0) = 1$ gegeben. Setzen wir $x = 0$ in der allgemeinen Lösung ein, so erhalten wir

$$y(0) = C.$$

Aufgrund der gegebenen Bedingung muss dieser Ausdruck nun gleich eins sein. Es folgt somit $C = 1$ und die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

Diese Funktion heisst *partikuläre Lösung* der Differentialgleichung $y' = x$ zur Bedingung $y(0) = 1$.

1.2.5. *Anfangsbedingungen.* Die Bedingungen, welche zu einer partikulären Lösung führen, können in zwei unterschiedlichen Formen vorliegen. Sind die Bedingungen in einer Weise formuliert, welche zu Werten der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen für ein festes $x = x_0$ führen, so heissen die Bedingungen *Anfangsbedingungen.*

Betrachten wir beispielsweise die Differentialgleichung des obigen kinematischen Beispiels: $y'' = a$ (für konstantes a) und geben wir Werte für die Position und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ vor, so sind dies Anfangsbedingungen.

Die meisten Probleme der Kinematik oder Dynamik werden als *Anfangswertprobleme* formuliert, i.e. die Differentialgleichung zusammen mit Anfangsbedingungen ist gegeben und es wird die partikuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung zu den gegebenen Anfangsbedingungen gesucht.

1.2.6. *Randbedingungen.* Führen die gegebenen Bedingungen zu Werten der gesuchten Funktion für verschiedene Werte von x, so heissen die Bedingungen *Randbedingungen.* Das Problem des Auffindens einer partikulären Lösung einer gegebenen Differentialgleichung mit gegebenen Randwerten heisst *Randwertproblem.*

Als Beispiel eines Randwertproblems betrachten wir einen zweiseitig aufgelegten Balken unter Eigenlast und suchen die Auslenkung y in Abhängigkeit der horizontalen Koordinate x. Die Gesetzmässigkeit, welche dieses Problem beschreibt ist die Differentialgleichung der Balkenbiegung

$$y''(x) = \frac{1}{EI}M(x),$$

wobei wir mit E den Elastizitätsmodul des betrachteten Materials, mit I das Flächenträgheitsmoment und mit $M(x)$ das wirkende Moment in Abhängigkeit der horizontalen Koordinate x bezeichnen. Die Länge des Balkens sei L. Aus der konstanten Streckenlast q folgt das Moment $M(x) = \frac{q}{2}(Lx - x^2)$ und die Differentialgleichung wird zu

$$y''(x) = K(Lx - x^2), \qquad \text{mit} \qquad K = \frac{q}{2EI}.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich durch zweifache unbestimmte Integration zu

$$y(x) = K\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1 x + C_2.$$

Die Bedingung der beidseitigen Auflage (bei $x = 0$ und $x = L$) ergibt die Werte

$$y(0) = y(L) = 0.$$

Die beiden Bedingungen in die allgemeine Lösung eingesetzt führt auf die Gleichungen

$$y(0) = C_2 \stackrel{!}{=} 0, \qquad y(L) = K\left(\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12}\right) + C_1 L$$
$$= \frac{KL^4}{12} + C_1 L \stackrel{!}{=} 0.$$

Somit folgt

$$C_1 = -\frac{KL^3}{12}, \qquad C_2 = 0$$

Mathematik 1, Lisibach André

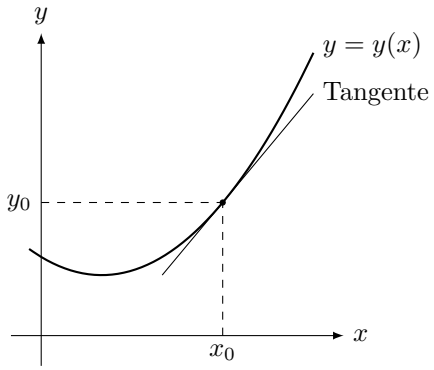
und die partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) &= K\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{L^3x}{12}\right) \\ &= \frac{q}{24EI}\left(2Lx^3 - x^4 - L^3x\right). \end{aligned}$$

1.3. **Geometrische Betrachtung: Richtungsfeld.** Wir betrachten Differentialgleichungen erster Ordnung in expliziter Darstellung, i.e. von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

für eine gegebene Funktion $f(x, y)$. Sei $y(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Im folgenden bezeichnen wir den Graphen $y = y(x)$ als *Lösungskurve*. Sei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Lösungskurve $y = y(x)$. Wir betrachten nun die Tangente an die Lösungskurve in diesem Punkt:



Die Steigung dieser Tangente ist gegeben durch

$$m = \frac{dy}{dx}(x_0) = f(x_0, y_0).$$

I.e. die Steigung der Lösungskurve in einem Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch $f(x_0, y_0)$. Insbesondere ist somit die Steigung der Lösungskurve bekannt, ohne Kenntnis der Lösung $y(x)$.

Durch diese Erkenntnis ist für jeden zulässigen Punkt (x_0, y_0) die Richtung gegeben, in welcher eine Lösungskurve durch diesen Punkt verlaufen muss. Die Darstellung dieser Richtungen als kurzes Tangentenstück wird als *Richtungsfeld* bezeichnet.

Wir illustrieren am Beispiel der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 2 - y.$$

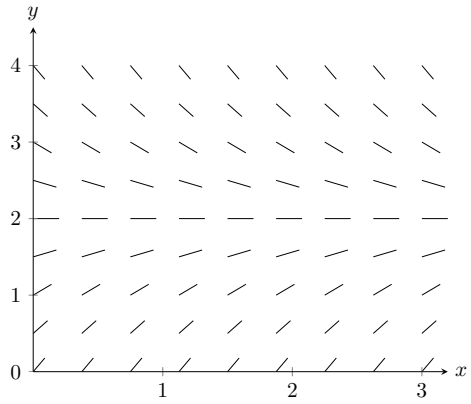
I.e. $f(x, y) = 2 - y$. Für eine effiziente Konstruktion des Richtungsfeldes setzt man die Funktion $f(x, y)$ gleich einer Konstanten m:

$$f(x, y) = m.$$

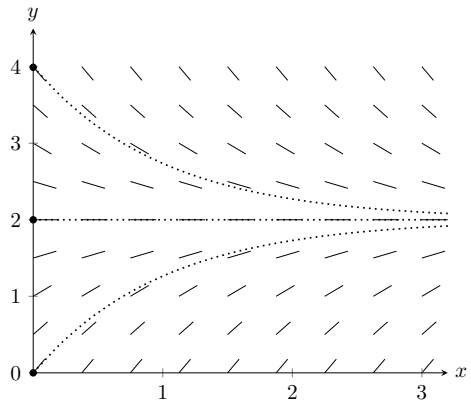
Die Menge der Punkte (x, y), welche diese Gleichung für ein festes m erfüllen, wird als *Isokline* zur Steigung m bezeichnet (entspricht der Höhenlinie $f(x, y) = m$). Für die Wahl $m = 0$ ergibt sich die Gleichung $2 - y = 0$ mit Lösung $y = 2$. I.e. entlang der Isokline $y = 2$ ist die Steigung des Richtungsfeldes gleich 0. Für $m = 1$ ergibt sich die Isokline $y = 1$, für $m = -1$ ergibt sich die Isokline $y = 3$. Wir erhalten das Richtungsfeld

Mathematik 1, Lisibach André

(wir beschränken uns auf $x \geq 0$):



Lösungskurven $y = y(x)$ der Differentialgleichung verlaufen in jedem Punkt (x, y) parallel zum Richtungsfeld und können somit bei gegebenem Richtungsfeld skizziert werden. Wir skizzieren für das Beispiel drei Lösungskurven, welche durch die Punkte $(x_0, y_0) = (0, 0), (0, 2), (0, 4)$ verlaufen:



Diese drei Lösungskurven entsprechen den drei partikulären Lösungen der Differentialgleichung $y' = 2 - y$ zu den drei Anfangsbedingungen $y(0) = 0, 2, 4$.

Bemerkungen:

(i) Die so skizzierten Lösungskurven entsprechen einem qualitativen Bild der Lösungen der Differentialgleichung.

(ii) Aus diesem qualitativen Bild lässt sich das Langzeitverhalten ablesen. Mit dem Langzeitverhalten ist das Verhalten der Lösung für $x \to \infty$ gemeint. Im obigen Beispiel sehen wir dass für alle möglichen Anfangsbedingungen jeweils

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 2$$

gilt (die konstante Funktion $y(x) \equiv 2$ ist selbst eine Lösung der Differentialgleichung).

(iii) Die Gesamtmenge der Lösungskurven entspricht der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung.

Bemerkung zu Existenz und Eindeutigkeit. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Sind f und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig, so besitzt dieses Anfangswertproblem in einer Umgebung von x_0 genau eine Lösung. I.e. durch den Punkt (x_0, y_0) verläuft genau eine Lösungskurve. Die beiden folgenden Beispiele zeigen dass sowohl die Voraussetzungen an f als auch die Einschränkung auf eine Umgebung von x_0 wesentlich sind.

Im ersten Beispiel ist die Lösung nicht eindeutig. Wir betrachten

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \qquad y(0) = 0.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Wie man durch Einsetzen prüft, sind sowohl

$$y_1(x) = x^3 \qquad \text{als auch} \qquad y_2(x) \equiv 0$$

Lösungen dieses Anfangswertproblems. Es verlaufen somit zwei Lösungskurven durch den Punkt $(0,0)$. In diesem Beispiel ist $f(x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ und die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$ existiert für $y = 0$ nicht, i.e. das Richtungsfeld ändert in y-Richtung zu stark.

Im zweiten Beispiel existiert die Lösung nicht für alle x. Wir betrachten

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1.$$

Die Lösung davon ist

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

und diese ist nur für $x < 1$ definiert. Die Aussage des obigen Satzes ist somit lokal, i.e. sie macht keine Aussage über die Grösse des Intervalls auf welchem die Lösung existiert.

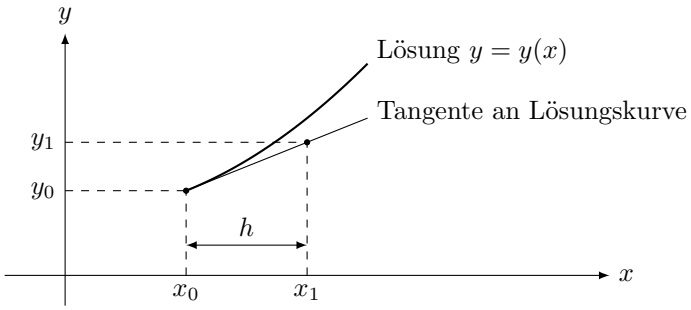
1.4. **Numerische Lösung eines Anfangswertproblems.** Wir betrachten Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

und suchen eine Lösung $y(x)$ für $x \in [x_0, b]$. Dazu unterteilen wir das Intervall $[x_0, b]$ in n Teile der Länge $h = \frac{b-x_0}{n}$. Diese Länge heisst *Schrittweite*. Ausgehend vom Punkt (x_0, y_0) folgen wir nun der Richtung im Richtungsfeld, so dass wir in x-Richtung die Distanz h zurücklegen und erreichen somit den Punkt (x_1, y_1), wobei

$$x_1 = x_0 + h, \qquad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Das heisst wir haben in x-Richtung die Distanz h und in y-Richtung die Distanz $hf(x_0, y_0)$ zurückgelegt.



Für kleine Schrittweite h ist y_1 eine Approximation für die Lösung $y(x_1)$, i.e.

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Dies ist analog zur Linearisierung der Funktion $y(x)$ im Punkt (x_0, y_0). Nun wird vom Punkt (x_1, y_1) aus ein weiterer Schritt ausgeführt. Dieser Schritt führt auf den Punkt (x_2, y_2):

$$x_2 = x_1 + h, \qquad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Fahren wir in diesem Sinne weiter, so erhalten wir die induktive Vorschrift für das Auffinden des Punktes mit Koordinaten (x_{k+1}, y_{k+1}):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h, \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit eine Approximation der Lösung nur an diskreten Punkten. Wird ein Wert zwischen zwei Punkten benötigt, so muss interpoliert werden. Somit liefert die stückweise gerade Kurve

$$(x_0, y_0) - (x_1, y_1) - (x_2, y_2) - \ldots - (x_n, y_n)$$

eine Approximation der Lösungskurve $y(x)$. Man nennt die obige Vorschrift *Methode von Euler*. Charakteristisch für diese Methode ist dass für die Richtung im Richtungsfeld in

Mathematik 1, Lisibach André

jedem Schritt nur der Wert an einer Stelle (dem vorhergehenden Punkt) verwendet wird. Die Approximation wird umso besser, je kleiner die Schrittweite h gewählt wird.

Eine Erweiterung der Methode von Euler ist die *Methode von Heun*. In dieser Methode wird die Steigung für den Schritt als Mittelwert der Steigungen an den Punkten (x_k, y_k) und (x_{k+1}, y^*_{k+1}) berechnet, wobei die y^*_{k+1}-Koordinate der y_{k+1}-Koordinate des Punktes nach der Methode von Euler entspricht. Es ergibt sich die Vorschrift

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h, \\ y^*_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\Big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})\Big), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Eine weitere Verfeinerung der Methode von Heun ist die *Methode von Runge und Kutta*. In dieser Methode wird die Steigung des Richtungsfeldes an vier verschiedenen Stellen berechnet und gewichtet:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(x_k, y_k), \\ m_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}m_1\right), \\ m_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}m_2\right), \\ m_4 &= f(x_k + h, y_k + hm_3), \\ x_{k+1} &= x_k + h, \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{3}\Big(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + \frac{m_4}{2}\Big), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Die obigen drei Verfahren unterscheiden sich in ihrer Genauigkeit: halbiert man die Schrittweite, so verkleinert sich der Fehler bei Euler um den Faktor 2, bei Heun um den Faktor 4 und bei Runge und Kutta um den Faktor 16.

Die Methode nach Runge und Kutta ist in der Praxis die am weitesten verbreitete Methode. In den gebräuchlichen Softwarepaketen ist eine Verfeinerung davon mit automatischer Schrittweitenanpassung implementiert.

1.5. **Separierbare Gleichungen.**

1.5.1. *Theorie.* Eine Differentialgleichung erster Ordnung heisst *separierbar*, wenn sie in der Form

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

geschrieben werden kann, i.e. wenn die rechte Seite ein Produkt einer Funktion von x mit einer Funktion von y ist. Beispielsweise ist $y' = 6y^2x$ separierbar (mit $g(x) = 6x$ und $h(y) = y^2$), die Gleichung $y' = x + y$ hingegen nicht.

Zur Lösung dividieren wir durch $h(y)$:

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Dabei ist zu beachten dass Nullstellen von h konstante Lösungen der Differentialgleichung liefern, welche bei dieser Division verloren gehen.

Wir integrieren nun beide Seiten nach x:

$$\int \frac{1}{h(y(x))}\frac{dy}{dx}(x)\,dx = \int g(x)\,dx.$$

Auf die linke Seite wenden wir die Substitutionsregel mit der Substitution $y = y(x)$, $dy = \frac{dy}{dx}dx$, an und erhalten

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx.$$

Auf der linken Seite steht ein Integral in der Variablen y, auf der rechten Seite ein Integral in der Variablen x, i.e. die Variablen sind separiert. Das Ausführen der beiden

Mathematik 1, Lisibach André

Integrationen liefert eine Gleichung in x und y. Man sagt die Lösung liege in *impliziter Form* vor. Das Auflösen dieser Gleichung nach y (falls möglich) liefert die allgemeine Lösung $y(x)$ in expliziter Form. Die partikuläre Lösung ergibt sich durch eine Anfangsbedingung, welche die Konstante C fixiert.

1.5.2. *Formales Vorgehen.* In der Praxis führt man die obige Rechnung nicht jedes Mal aus, sondern schreibt die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

formal direkt um auf

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx.$$

Dieser Schritt heisst *Separation der Variablen*. Das formale Vorgehen unterteilt sich damit in die folgenden Schritte:

(i) Separation der Variablen

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx.$$

(ii) Integration beider Seiten

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx.$$

Dies liefert eine Gleichung in x und y, i.e. die Lösung in impliziter Form.

(iii) Auflösen nach y (falls möglich). Dies liefert die allgemeine Lösung $y(x)$.

Die partikuläre Lösung ergibt sich durch eine Anfangsbedingung, welche die Konstante C fixiert.

Wir illustrieren die einzelnen Schritte am Beispiel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \qquad y(2) = 1.$$

(i) Separation:

$$y\,dy = x\,dx.$$

(ii) Integration:

$$\int y\,dy = \int x\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

(iii) Auflösen: Multiplikation mit 2 ergibt $y^2 = x^2 + 2C$. Da C eine beliebige Konstante ist, bezeichnen wir $2C$ wieder mit C und erhalten die allgemeine Lösung

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + C}.$$

Die Anfangsbedingung $y(2) = 1$ ist positiv, es kommt somit nur das positive Vorzeichen in Frage. Aus

$$y(2) = \sqrt{4 + C} \stackrel{!}{=} 1$$

folgt $C = -3$ und somit die partikuläre Lösung

$$y(x) = \sqrt{x^2 - 3}.$$

Diese Lösung ist nur für $x > \sqrt{3}$ definiert, i.e. auf dem grössten Intervall um den Punkt $x = 2$, auf welchem der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist.

Ein wichtiges Beispiel ist die Gleichung

$$y' = ky, \qquad y(0) = y_0, \qquad k \in \mathbb{R} \text{ konstant}.$$

Separation und unbestimmte Integration liefert

$$\int \frac{dy}{y} = \int k dx.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Ausführen der Integration ergibt

$$\log(y) = kx + C_1.$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) = e^{kx+C_1} &= e^{C_1}e^{kx} \\ &= C_2 e^{kx}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ haben wir die partikuläre Lösung

$$y(x) = y_0 e^{kx}.$$

Bemerkung: Genau genommen kann die Konstante C_2 in der obigen Herleitung nur positive Werte annehmen, da sie aus der Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$ durch $C_2 = e^{C_1}$ hervorgeht. Wir haben jedoch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\log(|x|) &= \begin{cases} \frac{d}{dx}\log(x) & x > 0 \\ \frac{d}{dx}\log(-x) & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\int \frac{1}{x}dx = \log(|x|) + C.$$

In der obigen Herleitung haben wir also

$$\log(|y|) = kx + C_1.$$

Dies ergibt

$$|y| = C_2 e^{kx}$$

(mit $C_2 = e^{C_1} > 0$) und daraus folgen die Lösungen

$$y = C_2 e^{kx}, \qquad y = -C_2 e^{kx}.$$

Weiter ist in diesem Beispiel $h(y) = y$ und die Nullstelle $y = 0$ liefert, wie oben erwähnt, die bei der Separation verloren gegangene Lösung[2] $y(x) \equiv 0$. Zusammen lassen sich diese Lösungen zur allgemeinen Lösung

$$y(x) = Ce^{kx}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

zusammenfassen. Diese Lösung stimmt mit der Lösung der obigen 'naiven' Herleitung überein.

Wir fassen das Resultat dieses Beispiels nochmals zusammen: Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y' = ky, \qquad k \in \mathbb{R},$$

lautet

$$y(x) = Ce^{kx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

1.6. **Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.**

1.6.1. *Begriffe.* Eine Differentialgleichung erster Ordnung heisst *linear* wenn sie in der Form

$$y' + p(x)y = q(x)$$

geschrieben werden kann. Hier sind $p(x)$ und $q(x)$ gegebene Funktionen. Die Funktion $q(x)$ heisst *Störfunktion*. Die Gleichung heisst *homogen* falls $q(x) \equiv 0$, ansonsten *inhomogen*. Wie üblich schreiben wir das Argument der gesuchten Funktion nicht, i.e. y steht für $y(x)$.

[2] $f(x) \equiv 0$ bedeutet dass die Funktion $f(x)$ identisch, also für alle x, gleich Null ist.

Mathematik 1, Lisibach André

Die folgende Tabelle illustriert die eingeführten Begriffe an Beispielen:

Gleichung	linear	homogen	separierbar
$y' = y^2$	nein	-	ja
$y' = x^2$	ja	nein	ja
$y' = e^{-x}y$	ja	ja	ja
$y' = xy + e^{-x}$	ja	nein	nein
$y' = xy + x$	ja	nein	ja

1.6.2. *Lösungsidee: der integrierende Faktor.* Wir betrachten die Gleichung

$$y' + 2y = 3,$$

i.e. den Fall $p(x) = 2$ und $q(x) = 3$.

Die Idee besteht darin, die linke Seite als Ableitung eines einzigen Ausdrucks zu schreiben:

$$y' + 2y = \frac{d}{dx}\,(\,?\,).$$

Gelingt dies, so liefert Integration beider Seiten unmittelbar die Lösung. Die linke Seite besteht aus zwei Termen, und genau zwei Terme entstehen beim Ableiten eines Produktes. Der gesuchte Ausdruck ist also ein Produkt, und da einer der beiden Terme die Ableitung y' enthält, ist y einer der beiden Faktoren. Den zweiten Faktor kennen wir noch nicht, wir bezeichnen ihn mit $\mu(x)$ und multiplizieren die Gleichung damit:

$$\big(y' + 2y\big)\,\mu(x) = 3\mu(x).$$

Die Funktion $\mu(x)$ heisst *integrierender Faktor*. Wir bestimmen sie so, dass die linke Seite gerade die Ableitung von $y\mu(x)$ ist. Wir fordern also

$$y'\mu(x) + 2y\mu(x) \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx}\,(y\mu(x)) = y'\mu(x) + y\mu'(x).$$

Ein Vergleich der beiden Seiten zeigt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\mu'(x) = 2\mu(x)$$

gilt. Diese Gleichung für $\mu(x)$ ist separierbar und hat die allgemeine Lösung $\mu(x) = Ce^{2x}$. Wir benötigen nur *einen* integrierenden Faktor und wählen deshalb $C = 1$, i.e.

$$\mu(x) = e^{2x}.$$

Damit rechnen wir:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 3 \qquad \Big| \cdot e^{2x} \\ \big(y' + 2y\big)\,e^{2x} &= 3e^{2x}. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist die linke Seite die Ableitung von ye^{2x}, i.e.

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{2x}\right) = 3e^{2x}.$$

Integration beider Seiten nach x ergibt

$$ye^{2x} = \frac{3}{2}e^{2x} + C$$

und Multiplikation mit e^{-2x} liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = e^{-2x}\left(\frac{3}{2}e^{2x} + C\right) = \frac{3}{2} + Ce^{-2x}.$$

Bemerkungen:

(i) In diesem Beispiel ist $p(x) = 2$ und $\mu(x) = e^{2x}$. Der Exponent $2x$ ist eine Stammfunktion von $p(x)$. Dieser Zusammenhang gilt allgemein, wie wir weiter unten sehen werden.

Mathematik 1, Lisibach André

(ii) Der integrierende Faktor $\mu(x) = e^{2x}$ ist für alle x von Null verschieden. Die Multiplikation der Gleichung mit $\mu(x)$ ist deshalb eine Äquivalenzumformung: Es geht keine Lösung verloren und es kommt keine hinzu. Dies steht im Gegensatz zur Separation der Variablen, wo durch die Division durch $h(y)$ Lösungen verloren gehen können. Die oben gefundene Lösung ist somit tatsächlich die allgemeine Lösung.

(iii) Die betrachtete Gleichung ist zugleich separierbar und liesse sich auch auf diesem Weg lösen.

1.6.3. *Allgemeines Vorgehen.* Wir führen die obige Rechnung nun für die allgemeine Gleichung

$$y' + p(x)y = q(x)$$

durch. Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $\mu(x)$ ergibt

$$y'\mu(x) + yp(x)\mu(x) = q(x)\mu(x).$$

Die Forderung, dass die linke Seite die Ableitung von $y\mu(x)$ ist, lautet

$$y'\mu(x) + yp(x)\mu(x) \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx}\left(y\mu(x)\right) = y'\mu(x) + y\mu'(x)$$

und führt durch Vergleich auf die Gleichung

$$\mu'(x) = p(x)\mu(x).$$

Diese Gleichung ist separierbar. Separation und Integration ergibt

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int p(x)dx, \qquad \text{i.e.} \qquad \log(\mu) = P(x) + C,$$

wobei $P(x)$ *eine* Stammfunktion von $p(x)$ bezeichnet. Daraus folgt

$$\mu(x) = e^{P(x)}$$

(wir wählen wieder die Konstante so, dass der Vorfaktor gleich eins ist). Dass diese Funktion die Forderung tatsächlich erfüllt, bestätigt eine kurze Rechnung:

$$\mu'(x) = \frac{d}{dx}e^{P(x)} = P'(x)e^{P(x)} = p(x)e^{P(x)} = p(x)\mu(x).$$

Bemerkung: Wir benötigen nur *einen* integrierenden Faktor, weshalb die Wahl einer festen Stammfunktion $P(x)$ genügt. Wählt man eine andere Stammfunktion $P(x) + a$, so erhält man den integrierenden Faktor $e^{P(x)+a} = e^a e^{P(x)}$. Der zusätzliche Faktor e^a steht dann auf beiden Seiten der Gleichung und kürzt sich weg.

Mit $\mu(x) = e^{P(x)}$ wird die Differentialgleichung zu

$$\left(y' + p(x)y\right)e^{P(x)} = q(x)e^{P(x)}, \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{d}{dx}\left(ye^{P(x)}\right) = q(x)e^{P(x)}.$$

Integration beider Seiten nach x ergibt

$$ye^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}dx + C,$$

wobei das Integral auf der rechten Seite für *eine* Stammfunktion von $q(x)e^{P(x)}$ steht (die Integrationskonstante wird durch das explizit geschriebene C berücksichtigt). Multiplikation mit $e^{-P(x)}$ liefert die allgemeine Lösung.

Theorem 1.1. *Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

lautet

$$y(x) = e^{-P(x)}\left(\int q(x)e^{P(x)}dx + C\right),$$

wobei $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.

Mathematik 1, Lisibach André

Für Anwendungen empfiehlt es sich nicht, sich diese Formel zu merken. Man merke sich stattdessen das Vorgehen:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad \Big| \cdot \mu(x), \qquad \text{wobei} \qquad \mu(x) = e^{P(x)}$$

und $P(x)$ *eine* Stammfunktion von $p(x)$ ist. Die linke Seite ist danach die Ableitung von $y\mu(x)$, und Integration beider Seiten liefert die Lösung. Die verbleibende Konstante C wird wie üblich durch eine Anfangsbedingung fixiert und ergibt so eine partikuläre Lösung.

1.6.4. *Struktur der Lösung.* Wir betrachten die inhomogene Gleichung und die zugehörige homogene Gleichung

$$y' + p(x)y = q(x),$$
$$y' + p(x)y = 0.$$

Die zweite Gleichung erhält man aus der ersten, indem man die Störfunktion weglässt. Sie ist separierbar und hat die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = Ce^{-P(x)}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

wobei $P(x)$ wieder eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.

Multiplizieren wir in der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung aus, so erhalten wir

$$y(x) = \underbrace{e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}dx}_{=:y_i(x)} + \underbrace{Ce^{-P(x)}}_{=y_h(x)}.$$

Der erste Summand $y_i(x)$ entsteht aus der allgemeinen Lösung durch die Wahl $C = 0$ und ist somit eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Der zweite Summand ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Wir halten fest:

$$y(x) = y_i(x) + y_h(x),$$

i.e. die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist die Summe einer Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

Diese Struktur ist kein Zufall, sondern eine Folge der Linearität. Wir schreiben

$$L(y) = y' + p(x)y.$$

Die inhomogene und die homogene Gleichung lauten in dieser Notation $L(y) = q(x)$ und $L(y) = 0$. Für zwei Funktionen y_1, y_2 und eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2), \qquad L(ay_1) = aL(y_1),$$

wie man durch Einsetzen sofort nachrechnet. Daraus folgt:

(i) Ist y_i eine Lösung der inhomogenen Gleichung und y_h eine Lösung der homogenen Gleichung, so gilt

$$L(y_i + y_h) = L(y_i) + L(y_h) = q(x) + 0 = q(x),$$

i.e. $y_i + y_h$ ist wieder eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

(ii) Sind y_1, y_2 zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung, so gilt

$$L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = q(x) - q(x) = 0,$$

i.e. zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung unterscheiden sich nur um eine Lösung der homogenen Gleichung.

Kennt man also eine einzige Lösung der inhomogenen Gleichung und alle Lösungen der homogenen Gleichung, so erhält man durch Addition alle Lösungen der inhomogenen Gleichung.

Analogie zur linearen Algebra. Dieselbe Struktur kennen wir von linearen Gleichungssystemen. Wir betrachten

$$A\vec{x} = \vec{b}, \qquad A\vec{x} = \vec{0},$$

i.e. ein inhomogenes System und das zugehörige homogene System. Ist $\vec{x}_i$ eine Lösung des inhomogenen Systems und ist die Lösungsmenge des homogenen Systems gegeben durch $C\vec{x}_0$ mit $C \in \mathbb{R}$, so lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{x} = \vec{x}_i + C\vec{x}_0.$$

Geometrisch ist dies eine Gerade durch den Punkt $\vec{x}_i$ mit Richtungsvektor $\vec{x}_0$, i.e. eine verschobene Gerade, welche im Allgemeinen nicht durch den Ursprung geht. Genau dies ist der Grund, weshalb man eine spezielle Lösung benötigt: Sie legt fest, wohin die Lösungsmenge der homogenen Gleichung verschoben wird.

Der Grund für die Übereinstimmung der beiden Situationen ist in beiden Fällen derselbe: Sowohl $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ als auch $y \mapsto L(y) = y' + p(x)y$ sind lineare Abbildungen.

1.7. **Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.**

1.7.1. *Begriffe.* Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung heisst *linear* wenn sie in der Form

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

geschrieben werden kann. Hier sind $p(x)$, $q(x)$ und $r(x)$ gegebene Funktionen. Die Funktion $r(x)$ heisst *Störfunktion*. Die Gleichung heisst *homogen* falls $r(x) \equiv 0$, ansonsten *inhomogen*. Achtung: Die Bezeichnung q hat hier eine andere Bedeutung als bei den linearen Gleichungen erster Ordnung, die Störfunktion heisst hier r.

Wie bei den Gleichungen erster Ordnung schreiben wir

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y.$$

Die inhomogene und die homogene Gleichung lauten in dieser Notation $L(y) = r(x)$ und $L(y) = 0$. Für zwei Funktionen y_1, y_2 und eine Konstante a gilt wiederum

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2), \qquad L(ay_1) = aL(y_1),$$

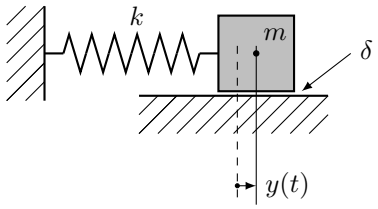
i.e. $y \mapsto L(y)$ ist eine lineare Abbildung.

Im Folgenden beschränken wir uns auf den wichtigen Fall, in welchem p und q Konstanten sind, i.e. auf Gleichungen mit *konstanten Koeffizienten*:

$$L(y) = y'' + py' + qy, \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

und betrachten zunächst die homogene Gleichung $L(y) = 0$.

1.7.2. *Motivation: Feder-Masse-Dämpfungssystem.* Eine wichtige Klasse von Systemen, deren dynamisches Verhalten durch eine Gleichung der Form $y''+py'+qy = 0$ beschrieben wird, sind mechanische Systeme bestehend aus Masse, Feder und geschwindigkeitsproportionaler Reibung. Als Vertreter betrachten wir die folgende Anordnung:



Die Masse kann sich horizontal (und in einer Dimension) bewegen. Sie ist über eine (lineare) Feder mit der festen Struktur verbunden und es wirkt auf sie eine Reibungskraft, welche proportional zur Geschwindigkeit ist.

Wir bezeichnen mit m die Masse, mit k die Federkonstante, mit δ den Reibungskoeffizienten und mit $y(t)$ die Auslenkung aus der (gestrichelt eingezeichneten) Ruhelage. Die Auslenkung besitzt ein Vorzeichen und ist rechts von der Ruhelage positiv. Die einwirkenden Kräfte sind die Federkraft F_F und die Reibungskraft F_R:

$$F_F = -ky(t), \qquad F_R = -\delta y'(t).$$

Aus dem Newtonschen Gesetz ($F = ma$) folgt

$$-ky(t) - \delta y'(t) = my''(t),$$

Mathematik 1, Lisibach André

i.e.

$$y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Dies ist eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $p = \delta/m$ und $q = k/m$.

Bemerkung: Wirkt zusätzlich eine äussere Kraft $F(t)$ auf die Masse, so folgt aus dem Newtonschen Gesetz die inhomogene Gleichung

$$y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}F(t)$$

mit der Störfunktion $r(t) = F(t)/m$.

1.7.3. *Erste Lösungen im Fall $p = 0$, $q > 0$.* Mit $p = 0$ und $q > 0$ (mechanisch: keine Reibung) setzen wir $\omega_0 = \sqrt{q}$ und erhalten

$$y'' + \omega_0^2 y = 0.$$

Durch Einsetzen sieht man, dass $y_1(x) = \cos(\omega_0 x)$ und $y_2(x) = \sin(\omega_0 x)$ Lösungen sind. Wegen der Linearität von L gilt $L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = 0$, i.e. auch jede Linearkombination

$$y(x) = C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x) \qquad (*)$$

ist eine Lösung.

Es stellt sich die Frage, ob damit alle Lösungen gefunden sind, i.e. ob $(*)$ die allgemeine Lösung ist. Anders gefragt: Ist jede Lösung $z(x)$ eines Anfangswertproblems

$$z'' + \omega_0^2 z = 0, \qquad z(0) = z_0, \qquad z'(0) = z_0'$$

von der Form $(*)$? Die Antwort ist ja: Die Funktion

$$y(x) = z_0 \cos(\omega_0 x) + \frac{z_0'}{\omega_0} \sin(\omega_0 x)$$

ist von der Form $(*)$ und löst, wie man durch Einsetzen nachprüft, dasselbe Anfangswertproblem. Da die Lösung eines Anfangswertproblems eindeutig ist, folgt $z(x) = y(x)$. Somit ist

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

die allgemeine Lösung von $y'' + \omega_0^2 y = 0$.

Bemerkungen:

(i) Wir nehmen hier und im Folgenden an, dass jedes Anfangswertproblem eine Lösung besitzt und diese eindeutig ist.
(ii) Die Funktionen y_1, y_2 sind *linear unabhängig*, i.e. keine der beiden ist ein Vielfaches der anderen.
(iii) Man nennt y_1, y_2 *Basislösungen* der Gleichung.

Allgemein gilt:

Theorem 1.2. *Seien y_1, y_2 linear unabhängige Lösungen von $L(y) = 0$. Dann ist die allgemeine Lösung von $L(y) = 0$ gegeben durch*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Bemerkungen:

(i) Für eine partikuläre Lösung werden die Konstanten C_1, C_2 zum Beispiel durch Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ festgelegt.
(ii) Analogie zur linearen Algebra: Die Lösungsmenge von $L(y) = 0$ hat dieselbe Struktur wie die Ebene $C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2$ durch den Ursprung, welche von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. Bei den Gleichungen erster Ordnung war die Lösungsmenge der homogenen Gleichung entsprechend eine Gerade durch den Ursprung.
(iii) Wie man y_1, y_2 im allgemeinen Fall findet, zeigt der nächste Teilabschnitt.

Mathematik 1, Lisibach André

1.7.4. *Aufsuchen der Basislösungen und allgemeine Lösung.* Wir betrachten

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ ergibt

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = \big(\lambda^2 + p\lambda + q\big)\, e^{\lambda x} = 0.$$

Wegen $e^{\lambda x} \neq 0$ folgt die *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Die linke Seite heisst *charakteristisches Polynom*. Somit ist $e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung, wenn λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, i.e.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Da $p, q \in \mathbb{R}$, sind drei Fälle zu unterscheiden:

(i) $p^2 - 4q > 0$: Es gilt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Basislösungen sind $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

(ii) $p^2 - 4q = 0$: Es gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{p}{2} \in \mathbb{R}$. Damit ist $y_1(x) = e^{\lambda x}$ eine Basislösung. Man kann zeigen (siehe Übung), dass $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ eine zweite Basislösung ist. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

(iii) $p^2 - 4q < 0$: Es gilt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, wobei

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Damit erhalten wir die (komplexen) Lösungen

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + j\sin(\beta x)\big),$$
$$\tilde{y}_2(x) = e^{(\alpha - j\beta)x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) - j\sin(\beta x)\big).$$

Wegen der Linearität von L sind auch Linearkombinationen mit komplexen Koeffizienten Lösungen. Wir erhalten so reelle Basislösungen:

$$y_1(x) = \frac{1}{2}\big(\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)\big) = e^{\alpha x}\cos(\beta x),$$
$$y_2(x) = \frac{1}{2j}\big(\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_2(x)\big) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ &= e^{\alpha x}\big(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\big) \\ &= Ce^{\alpha x}\cos(\beta x + \phi). \end{aligned}$$

Bemerkung: Für die Umformung in die letzte Zeile gilt

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \phi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right) \quad \text{falls } C_1 > 0.$$

1.7.5. *Diskussion der Lösungen.* Wir diskutieren die Lösungen am Beispiel des Feder-Masse-Dämpfungssystems

$$y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0, \qquad p = \frac{\delta}{m}, \quad q = \frac{k}{m},$$

Mathematik 1, Lisibach André

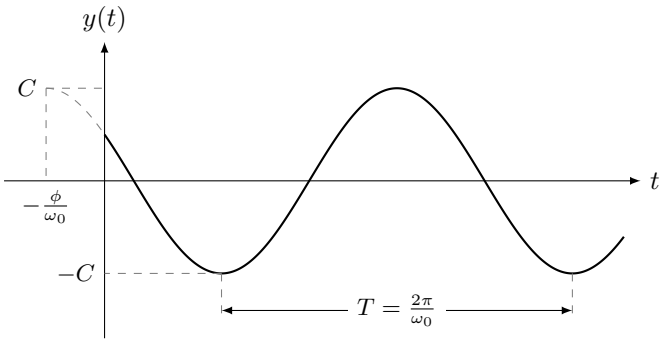
wobei die unabhängige Variable nun die Zeit t ist. Wir denken uns die Masse m und die Federkonstante k fest und erhöhen schrittweise den Reibungskoeffizienten δ.
Keine Reibung: $\delta = 0$. Mit $\delta = 0$ ist $p = 0$ und die Gleichung lautet $y'' + \frac{k}{m}y = 0$. Es liegt Fall (iii) vor mit $\alpha = 0$ und

$$\beta = \frac{\sqrt{4q}}{2} = \sqrt{q} = \sqrt{\frac{k}{m}} =: \omega_0.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \\ &= C \cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

mit $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ und $\tan(\phi) = -\frac{C_2}{C_1}$ (Amplituden-Phasen-Schreibweise). Die Lösung ist eine *harmonische Schwingung* mit der Kreisfrequenz ω_0 und der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Man nennt C die *Amplitude* und ϕ die *Phasenverschiebung*.



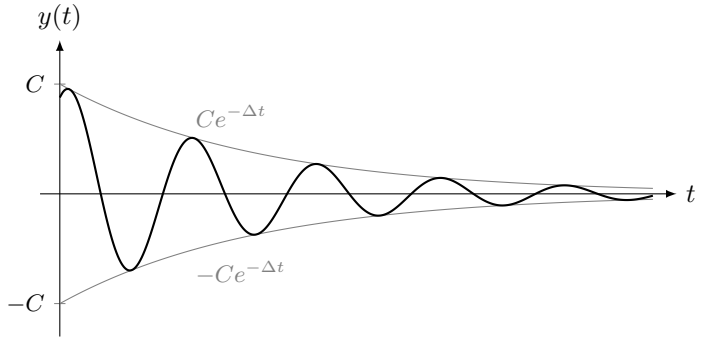
Schwache Dämpfung: $0 < \delta < 2\sqrt{km}$. Es gilt $\delta^2 < 4km$, i.e. $\left(\frac{\delta}{m}\right)^2 < \frac{4k}{m}$, i.e. $p^2 - 4q < 0$. Es liegt Fall (iii) vor mit $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{p}{2} = -\frac{\delta}{2m} = -\Delta, \qquad \Delta := \frac{\delta}{2m}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2} =: \omega_d. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\Delta t}\big(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)\big) \\ &= Ce^{-\Delta t} \cos(\omega_d t + \phi). \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine *gedämpfte Schwingung* mit der (exponentiell abnehmenden) Amplitude $Ce^{-\Delta t}$ und der Kreisfrequenz $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}$. Achtung: Es gilt $\omega_d < \omega_0$.



Kritische Dämpfung: $\delta = 2\sqrt{km}$. Es gilt $\left(\frac{\delta}{m}\right)^2 = \frac{4k}{m}$, i.e. $p^2 - 4q = 0$. Es liegt Fall (ii) vor mit

$$\lambda = -\frac{p}{2} = -\frac{\delta}{2m} = -\Delta.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\Delta t}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Bemerkung: Die Bedingung $\delta = 2\sqrt{km}$ ist gleichbedeutend mit $\frac{\delta}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, i.e. mit $\Delta = \omega_0$.
Starke Dämpfung: $\delta > 2\sqrt{km}$. Analog gilt $\Delta > \omega_0$ und $p^2 - 4q > 0$. Es liegt Fall (i) vor und die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

mit

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \omega_0^2}.$$

Wegen $\sqrt{\Delta^2 - \omega_0^2} < \Delta$ gilt $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$.
Bemerkungen:

(i) *Normierte Form.* Mit $\Delta = \frac{\delta}{2m}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ lautet die Differentialgleichung des Feder-Masse-Dämpfungssystems

$$y'' + 2\Delta y' + \omega_0^2 y = 0,$$

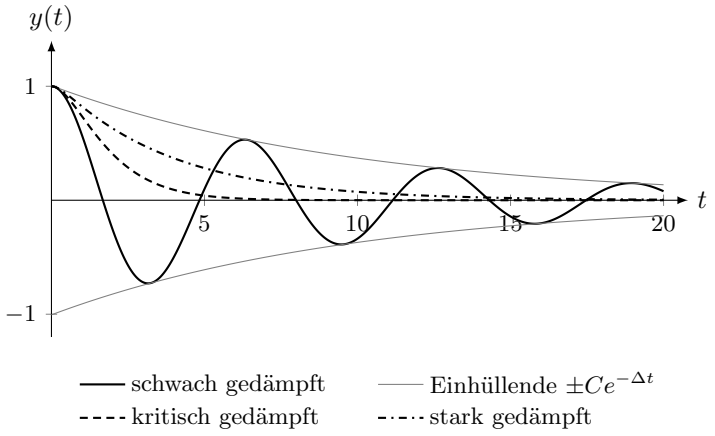
und die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind

$$\lambda_{1,2} = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \omega_0^2}.$$

Der Dämpfungsfall ist somit durch den Vergleich von Δ und ω_0 bestimmt: schwache Dämpfung für $\Delta < \omega_0$, kritische Dämpfung für $\Delta = \omega_0$ und starke Dämpfung für $\Delta > \omega_0$.

(ii) *Eigenfrequenz.* Die Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ der Schwingung ohne Reibung hängt nur von der Masse und der Federkonstanten ab. Sie heisst *Eigenfrequenz* des Systems. Bei schwacher Dämpfung schwingt das System mit der kleineren Kreisfrequenz $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}$.

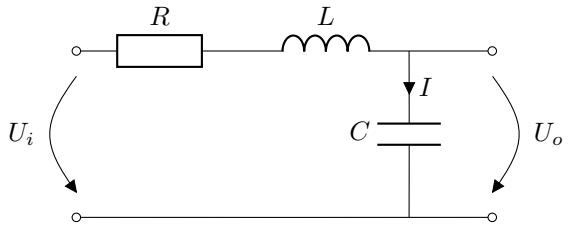
(iii) *Vergleich der Dämpfungsfälle.* Die folgende Grafik stellt die drei Dämpfungsfälle gegenüber. Die drei Systeme besitzen dieselbe Masse und dieselbe Federkonstante ($\omega_0 = 1$), lediglich der Reibungskoeffizient ist unterschiedlich: $\Delta = \frac{1}{10}$ (schwach), $\Delta = 1$ (kritisch) und $\Delta = 2$ (stark). Gewählt wurden die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, i.e. die Masse wird bei Auslenkung Eins losgelassen. Es ist ersichtlich, dass das stark gedämpfte System langsamer in die Ruhelage zurückkehrt als das kritisch gedämpfte.



1.7.6. *Analogie zu elektrischen Systemen.* Wir betrachten die folgende Schaltung mit einem Ohmschen Widerstand R, einer Spule mit Induktivität L und einem Kondensator

Mathematik 1, Lisibach André

mit Kapazität C:



Wir bezeichnen mit U_i, U_o die Eingangs- respektive die Ausgangsspannung dieser Schaltung. Der Maschensatz für die Spannungen ergibt

$$U_i = U_R + U_L + U_o.$$

Es gelten die folgenden Gesetze für die Spannung über den Ohmschen Widerstand und die Spule:

$$U_R = RI = RQ', \qquad U_L = LI' = LQ'',$$

wobei wir mit Q die Ladung auf dem Kondensator bezeichnen. Diese eingesetzt in der obigen Gleichung ergeben

$$\begin{aligned} U_i &= RQ' + LQ'' + U_o \\ &= RCU_o' + LCU_o'' + U_o, \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile das folgende Gesetz für die Spannung über den Kondensator (und die Ableitungen davon) verwendet haben:

$$CU_o = Q, \qquad CU_o' = Q', \qquad CU_o'' = Q''.$$

Die Differentialgleichung umgestellt und die Eingangsspannung $U_i = 0$ gesetzt (die Verbindungen des Eingangs kurzgeschlossen), ergibt die folgende Differentialgleichung für die Kondensatorspannung U_o:

$$U_o'' + \frac{R}{L}U_o' + \frac{1}{LC}U_o = 0.$$

Bemerkung: Aus dieser Differentialgleichung kann durch Ableiten, Multiplikation mit C und Verwenden von $CU_o' = Q' = I$ die Differentialgleichung für den Strom I gefunden werden:

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = 0.$$

Die beiden Differentialgleichungen für $U_o(t)$ oder $I(t)$ sind lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, i.e. die Gleichungen sind von derselben Form wie die Gleichung welche das mechanische Feder-Masse-Dämpfungssystem beschreibt:

$$y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Wir stellen die Grössen, welche einander in diesen Systemen analog sind, in der folgenden Tabelle gegenüber (man vergleiche die entsprechenden Differentialgleichungen):

Mechanisch	Elektrisch
Auslenkung $y(t)$	Spannung $U_o(t)$, Stromstärke $I(t)$
Masse m	Induktivität L
Reibungskoeffizient δ	Widerstand R
Federkonstante k	1/Kapazität $1/C$

Zum Beispiel entspricht der Masse m, welche im mechanischen System die Trägheit beschreibt, im elektrischen System die Induktivität L. Da nun beide Systeme mathematisch gleich beschrieben werden, können Erkenntnisse über die Lösung eines Systems direkt auf das andere System übertragen werden.

Beispiele:

(i) In einem mechanischen System ohne Reibung ($\delta = 0$) ist die Kreisfrequenz der Schwingung $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Somit schwingt die Spannung/der Strom in einem elektrischen Schaltkreis ohne Ohmschen Widerstand ($R = 0$) mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

(ii) Die Grössen der normierten Form (siehe Diskussion der Lösungen) lauten für das elektrische System

$$\Delta = \frac{R}{2L}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Kritische Dämpfung ($\Delta = \omega_0$) liegt somit für $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ vor, schwache Dämpfung für kleinere und starke Dämpfung für grössere Widerstände.

1.7.7. *Inhomogene Gleichung.* Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

mit der Störfunktion $r(x)$. In den Anwendungen beschreibt die Störfunktion eine äussere Einwirkung auf das System, man nennt sie deshalb auch *Anregung*:

- Wirkt im Feder-Masse-Dämpfungssystem eine äussere Kraft $F(t)$ auf die Masse, so lautet die Gleichung (siehe Motivation)

$$y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}F(t),$$

i.e. $r(t) = \frac{1}{m}F(t)$.

- Liegt an der Schaltung aus dem vorhergehenden Teilabschnitt eine Eingangsspannung $U_i(t)$ an, so folgt nach Division durch LC

$$U_o'' + \frac{R}{L}U_o' + \frac{1}{LC}U_o = \frac{1}{LC}U_i(t),$$

i.e. $r(t) = \frac{1}{LC}U_i(t)$.

Mit $L(y) = y'' + py' + qy$ lautet die inhomogene Gleichung $L(y) = r(x)$ und die dazugehörige homogene Gleichung $L(y) = 0$. Da L linear ist, gilt dasselbe wie bei den linearen Gleichungen erster Ordnung:

Theorem 1.3. *Sei $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung $L(y) = r(x)$ und sei $y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $L(y) = 0$. Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben durch*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_i(x) + y_h(x) \\ &= y_i(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x). \end{aligned}$$

Die Struktur der Lösung ist dieselbe wie bei den linearen Gleichungen erster Ordnung, und auch das Argument ist dasselbe (siehe Struktur der Lösung), da dort nur die Linearität von L verwendet wurde: Es gilt $L(y_i + y_h) = r(x) + 0 = r(x)$, und für zwei Lösungen y, y_i der inhomogenen Gleichung gilt $L(y - y_i) = r(x) - r(x) = 0$.

Bemerkung: In der Sprache der linearen Algebra ist die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung die Ebene $C_1y_1 + C_2y_2$ (Lösungsmenge der homogenen Gleichung), verschoben um y_i.

Die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der homogenen Gleichung kennen wir bereits. Für die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung benötigen wir somit nur noch *eine* Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Gleichung. Bei den Gleichungen erster Ordnung lieferte der integrierende Faktor diese direkt. Hier verwenden wir stattdessen einen *Ansatz*, dessen Form von der Störfunktion $r(x)$ abhängt. Wir illustrieren das Vorgehen zuerst an Beispielen und formulieren es danach allgemein.

1.7.8. *Beispiele.*

(i) Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5x}.$$

Da die Ableitungen von e^{5x} wieder Vielfache von e^{5x} sind, machen wir für eine Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz

$$y_i(x) = Ae^{5x}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$(25A - 20A - 12A)e^{5x} = 3e^{5x},$$

i.e. $A = -\frac{3}{7}$ und die Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y_i(x) = -\frac{3}{7}e^{5x}.$$

Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$y'' - 4y' - 12y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$, somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{6x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\begin{aligned} y(x) &= y_i(x) + y_h(x) \\ &= -\frac{3}{7}e^{5x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{6x}. \end{aligned}$$

(ii) Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' + 3y' + 2y = x^2.$$

Da die Ableitungen eines Polynoms wieder Polynome sind, machen wir für eine Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz eines Polynoms vom Grad 2:

$$y_i(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

i.e.

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C = x^2.$$

Koeffizientenvergleich ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 : \quad & 2A = 1, \\ x^1 : \quad & 6A + 2B = 0, \\ x^0 : \quad & 2A + 3B + 2C = 0. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{3}{2}, \qquad C = \frac{7}{4},$$

i.e.

$$y_i(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\begin{aligned} y(x) &= y_i(x) + y_h(x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}. \end{aligned}$$

(iii) Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}.$$

Wie im ersten Beispiel machen wir für eine Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz

$$y_i(x) = Ae^{-x}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$(A - 3A + 2A)e^{-x} = e^{-x}.$$

Die linke Seite verschwindet jedoch, i.e. der Ansatz $y_i(x) = Ae^{-x}$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung und kann die Gleichung nicht erfüllen. Wir multiplizieren den Ansatz mit x und erhalten den neuen Ansatz

$$y_i(x) = Axe^{-x}.$$

Die Ableitungen davon sind

$$y_i'(x) = A(1-x)e^{-x}, \qquad y_i''(x) = A(x-2)e^{-x}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$A\big(x - 2 + 3(1-x) + 2x\big)e^{-x} = e^{-x},$$

i.e.

$$Ae^{-x} = e^{-x}.$$

Somit folgt $A = 1$ und

$$y_i(x) = xe^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Gleichung lautet (siehe vorhergehendes Beispiel)

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\begin{aligned} y(x) &= y_i(x) + y_h(x) \\ &= xe^{-x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}. \end{aligned}$$

1.7.9. *Ansatz im allgemeinen Fall.* Für eine Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Gleichung $y'' + py' + qy = r(x)$ geht man wie folgt vor:

(i) In Abhängigkeit der Form von $r(x)$ macht man einen der folgenden Ansätze für $y_i(x)$:

Form von $r(x)$	Ansatz für $y_i(x)$
$ae^{\gamma x}$	$Ae^{\gamma x}$
$a\cos(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$a\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
Polynom vom Grad n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0$

Dabei sind A, B, A_n, A_{n-1}, …, A_0 (unbekannte) Konstanten.

(ii) Ist der Ansatz oder ein Summand des Ansatzes eine Lösung der homogenen Gleichung, so wird der Ansatz mit x multipliziert. Ist auch der neue Ansatz oder ein Summand davon eine Lösung der homogenen Gleichung, so multipliziert man nochmals mit x.

(iii) Der Ansatz wird in die Gleichung eingesetzt und die Konstanten werden durch Koeffizientenvergleich bestimmt.

Bemerkungen:

Mathematik 1, Lisibach André

(i) Bei $r(x) = a\cos(\omega x)$ (oder $a\sin(\omega x)$) muss der Ansatz sowohl den Kosinus als auch den Sinus enthalten, da beim Ableiten aus dem Kosinus ein Sinus wird und umgekehrt.

(ii) Ist die Störfunktion eine Summe, $r(x) = r_1(x)+r_2(x)$, und sind y_1, y_2 Lösungen von $L(y) = r_1(x)$ respektive $L(y) = r_2(x)$, so gilt wegen der Linearität

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = r_1(x) + r_2(x).$$

Man kann somit für jeden Summanden der Störfunktion separat eine Lösung suchen und diese addieren.

1.7.10. *Resonanz.* Wir betrachten das Feder-Masse-Dämpfungssystem mit einer zusätzlichen, periodischen Anregung mit der Kreisfrequenz ω:

$$y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = F_0\cos(\omega t).$$

Hinweis: F_0 besitzt die Dimension einer Kraft pro Masse, i.e. die Amplitude der wirkenden Kraft ist mF_0. Mit $\Delta = \frac{\delta}{2m}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (normierte Form) lautet die Gleichung

$$y'' + 2\Delta y' + \omega_0^2 y = F_0\cos(\omega t).$$

Wir nehmen an $0 < \Delta < \omega_0$, i.e. schwache Dämpfung.
Lösung der homogenen Gleichung. Aus der Diskussion der Lösungen wissen wir

$$\begin{aligned} y_h(t) &= e^{-\Delta t}\big(C_1\cos(\omega_d t) + C_2\sin(\omega_d t)\big) \\ &= Ce^{-\Delta t}\cos(\omega_d t + \phi), \qquad\qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}. \end{aligned}$$

Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir machen den Ansatz

$$y_i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} &\cos(\omega t)\big(-A\omega^2 + 2\Delta B\omega + A\omega_0^2\big) \\ &+ \sin(\omega t)\big(-B\omega^2 - 2\Delta A\omega + B\omega_0^2\big) = F_0\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)A + 2\Delta\omega B &= F_0, \\ -2\Delta\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B &= 0, \end{aligned}$$

mit Lösung

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Delta\omega)^2}\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 \\ 2\Delta\omega \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Delta\omega)^2}\Big((\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + 2\Delta\omega\sin(\omega t)\Big) \\ &= \tilde{C}\cos(\omega t + \tilde{\phi}), \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{C} = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Delta\omega)^2}}$$

und die Phase $\tilde{\phi}$ weiter unten diskutiert wird.
Allgemeine Lösung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_i(t) \\ &= \underbrace{Ce^{-\Delta t}\cos(\omega_d t + \phi)}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty} + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Delta\omega)^2}}\cos(\omega t + \tilde{\phi}). \end{aligned}$$

Mathematik 1, Lisibach André

Die Lösung der homogenen Gleichung klingt ab. Für grosse Zeiten ist somit nur $y_i(t)$ relevant. Man nennt $y_i(t)$ die *erzwungene Schwingung.*
Amplitude der erzwungenen Schwingung. Die Amplitude $\tilde{C}(\omega)$ hängt von der Kreisfrequenz ω der Anregung ab. Für $\omega = 0$ gilt $\tilde{C}(0) = \frac{F_0}{\omega_0^2}$. Die Amplitude wird maximal, wo

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Delta\omega)^2$$

minimal wird. Aus

$$f'(\omega) = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2(2\Delta\omega)2\Delta = 4\omega\big(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\Delta^2\big) = 0$$

folgt $\omega = 0$ oder $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\Delta^2$, i.e.

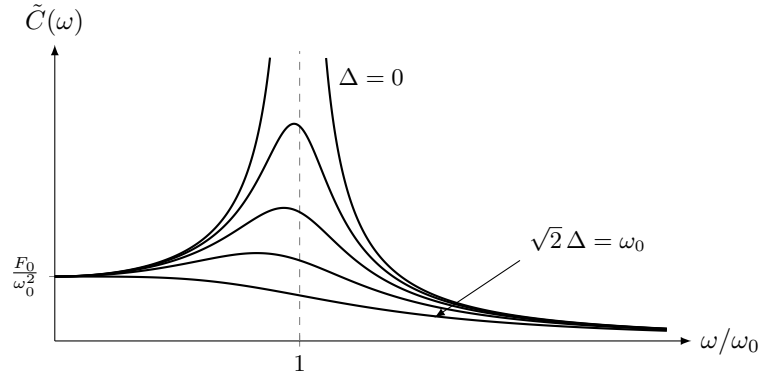
$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Delta^2}.$$

Bemerkungen:

(i) ω^* heisst *Resonanzfrequenz.*

(ii) Resonanz ist nur möglich für $\omega_0^2 > 2\Delta^2$, i.e. für $\omega_0 > \sqrt{2}\,\Delta$. Die Bedingung für Resonanz ist somit strenger als jene für schwache Dämpfung. Für $\omega_0 \leq \sqrt{2}\,\Delta$ ist $f'(\omega) > 0$ für $\omega > 0$, die Amplitude ist dann monoton fallend und maximal bei $\omega = 0$.

(iii) *Abhängigkeit von* Δ. Für $\Delta \to 0$ gilt $\omega^* \to \omega_0$ und $\tilde{C}(\omega^*) \to \infty$. Die folgende Grafik zeigt $\tilde{C}(\omega)$ für verschiedene Werte von Δ. Mit wachsendem Δ wird das Maximum kleiner und wandert nach links.

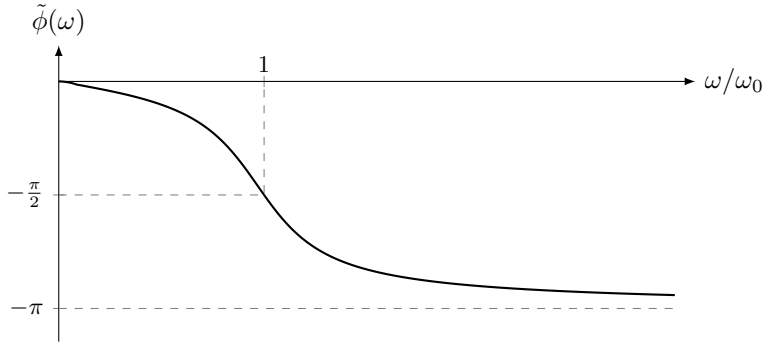


Für $\Delta = 0$ und $\omega = \omega_0$ ist $\cos(\omega_0 t)$ selbst eine Lösung der homogenen Gleichung und die obige Formel für y_i gilt nicht. Nach der Ansatzregel (Multiplikation mit t) folgt

$$y_i(t) = \frac{F_0}{2\omega_0}\, t \sin(\omega_0 t),$$

i.e. die Amplitude wächst unbeschränkt (siehe Aufgabe).

(iv) *Phase.* Für die Phase $\tilde{\phi}$ in $y_i(t) = \tilde{C}\cos(\omega t + \tilde{\phi})$ gilt:



Für $\omega \approx 0$ tritt keine Phasenverschiebung auf, i.e. das System schwingt so, wie es angeregt wird. Für $\omega \gg \omega_0$ schwingt das System der Anregung genau entgegengesetzt.

Mathematik 1, Lisibach André

Details zur Phase. Wir betrachten

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = \tilde{C}\cos(\omega t + \tilde{\phi})$$

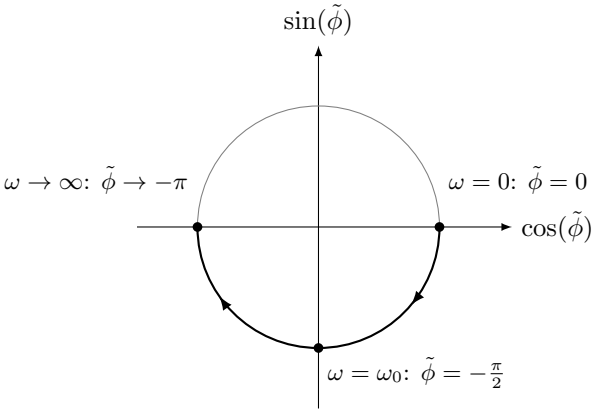
mit A, B von oben und $\tilde{C} = +\sqrt{A^2 + B^2}$ (Wahl des positiven Vorzeichens). Einsetzen von $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ergibt

$$A = \tilde{C}\cos(\tilde{\phi}), \qquad B = -\tilde{C}\sin(\tilde{\phi}).$$

Somit liegt der Punkt

$$\big(\cos(\tilde{\phi}), \sin(\tilde{\phi})\big) = \frac{1}{\tilde{C}}(A, -B) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Delta\omega)^2}}\big(\omega_0^2 - \omega^2,\ -2\Delta\omega\big)$$

auf dem Einheitskreis. Wegen $-2\Delta\omega < 0$ liegt er in der unteren Hälfte. Die erste Komponente ist positiv für $\omega < \omega_0$, verschwindet für $\omega = \omega_0$ und ist negativ für $\omega > \omega_0$. Mit wachsendem ω durchläuft der Punkt also die untere Hälfte des Einheitskreises von $\tilde{\phi} = 0$ über $\tilde{\phi} = -\frac{\pi}{2}$ nach $\tilde{\phi} = -\pi$:



Beispiel: Für $\omega = \omega_0$ gilt

$$y_i(t) = \tilde{C}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

1.8. **Mathematische Modellierung, ergänzende Themen.** Die Modellierung mechanischer Systeme am Beispiel des Feder-Masse-Dämpfungssystems und elektrischer Systeme am Beispiel des *RLC*-Schaltkreises wurde bereits in den Abschnitten 1.7.2 und 1.7.6 besprochen.

1.8.1. *Allgemein.* In diesem Teilabschnitt betrachten wir die Übersetzung einer durch einen Text gegebenen Gesetzmässigkeit in eine Differentialgleichung. Wir illustrieren an zwei Beispielen:

(i) *Lernkurve:* Sei $N(t)$ das Produktivitätsniveau eines Mitarbeiters zur Zeit t. Sei $N_{\max}$ das maximal erreichbare Niveau und es gelte folgendes: Die Lerngeschwindigkeit ist proportional zur Differenz zwischen aktuellem und maximal möglichem Niveau.

Die Lerngeschwindigkeit entspricht der Ableitung des Produktivitätsniveaus nach der Zeit, i.e. die Lerngeschwindigkeit ist dN/dt. Proportionalitäten werden mathematisch beschrieben als lineare Funktionen ohne y-Achsenabschnitt. I.e. für y proportional zu x gilt $y = C \cdot x$, wobei C die Proportionalitätskonstante ist. Somit ergibt sich aus dem obigen Text die Differentialgleichung:

$$\frac{dN}{dt}(t) = k(N_{\max} - N(t)),$$

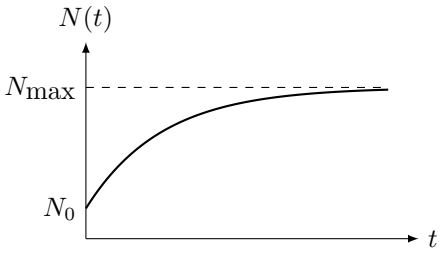
wobei wir mit $k > 0$ die Proportionalitätskonstante bezeichnen. Diese Differentialgleichung ist separierbar und wir erhalten

$$N(t) = N_{\max} - Ce^{-kt}.$$

Mit einem Anfangsproduktivitätsniveau von $N(0) = N_0$ ergibt sich

$$N(t) = N_{\max} - (N_{\max} - N_0)e^{-kt}.$$

Mathematik 1, Lisibach André



(ii) *Logistisches Wachstum:* Sei $N(t)$ die Grösse einer Population und es gelte:
(a) $0 \leq N(t) \leq 1$, i.e. die Population ist nach oben durch 1 beschränkt,
(b) das Wachstum ist proportional zur Population und
(c) das Wachstum ist proportional zur verbleibenden möglichen Populationsdifferenz.

In dieser Situation ist das Wachstum dN/dt proportional zu zwei unterschiedlichen Grössen. In der mathematischen Modellierung muss somit das Wachstum proportional zum Produkt der beiden Grössen sein[3]. Wir finden somit die Differentialgleichung

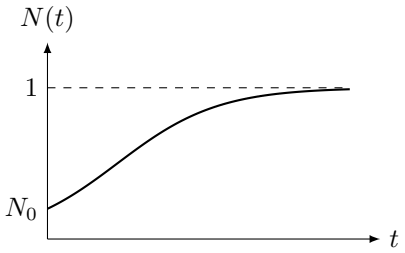
$$\frac{dN}{dt}(t) = N(t)(1 - N(t)),$$

wobei wir eine möglicherweise auftretende Proportionalitätskonstante gleich eins gesetzt haben. Auch diese Gleichung ist separierbar und wir erhalten

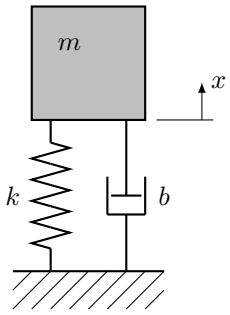
$$N(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}.$$

Mit einer Anfangspopulation von $N(0) = N_0$ folgt

$$N(t) = \frac{N_0}{(1 - N_0)e^{-t} + N_0}.$$



1.8.2. *Mechanische Ergänzungen.*
Vertikaler Oszillator. Wir betrachten die vertikale Bewegung einer Masse m, welche durch eine Feder mit Federkonstanten k und einen Dämpfer mit Dämpfungskonstante b mit dem festen Untergrund verbunden ist:

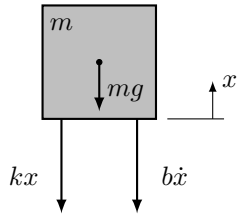


Es handelt sich um ein eindimensionales mechanisches Problem mit konstanter Masse m. Wir bezeichnen mit x die Auslenkung nach oben aus der vertikalen Lage, in welcher die Feder ungespannt ist (mechanisch entspricht dies der Lage in welcher das System

[3]Physikalisches Beispiel: Die Masse m eines Körpers ist proportional zu seinem Volumen V und seiner Dichte ρ, i.e. $m = V\rho$

Mathematik 1, Lisibach André

während der Montage fixiert wird). Für die Bestimmung der Summe der wirkenden Kräfte schneiden wir den Körper frei:



Für die eingezeichneten Kräfte wählen wir eine Richtung und tragen die wirkende Kraft in diese Richtung bei einer kleinen positiven Auslenkung x ein. Zum Beispiel führt eine kleine positive Auslenkung x zu einer gestreckten Feder. Somit wirkt auf den Körper an der Befestigungsstelle der Feder eine Zugkraft der Grösse xk nach unten. Mit der obigen gewählten Richtung der Federkraft (nach unten) ist diese Kraft somit kx. Analog erhalten wir die Reibungskraft, ausgeübt vom Dämpfer auf die Masse von $b\dot{x}$. Zusammen mit der Gravitationskraft mg wird die Gleichung $F = ma$ zu

$$-kx - b\dot{x} - mg = m\ddot{x}.$$

Hier erhalten wir die Minuszeichen vor den Kräften, da wir die positive x-Richtung nach oben gewählt haben. Umgestellt:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + mg = 0.$$

Nun betrachten wir die Ruhelage $x = x_0$ gegeben durch $\ddot{x} = \dot{x} = 0$. Die Gleichung vereinfacht sich zu

$$kx_0 + mg = 0.$$

Es folgt

$$x_0 = -\frac{mg}{k}.$$

Wir führen die neue Koordinate $\tilde{x} = x - x_0$ ein. I.e. $\tilde{x}$ beschreibt die Auslenkung aus der Ruhelage. Es folgt $x = \tilde{x} + x_0$ und $\dot{x} = \dot{\tilde{x}}$, $\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}}$. Die obige Differentialgleichung wird zu

$$m\ddot{\tilde{x}} + b\dot{\tilde{x}} + k(\tilde{x} + x_0) + mg = 0.$$

Zusammen mit dem obigen Ausdruck für x_0 reduziert sich dies auf

$$m\ddot{\tilde{x}} + b\dot{\tilde{x}} + k\tilde{x} = 0.$$

Dies entspricht der Differentialgleichung der horizontalen Bewegung einer Masse mit Feder und Dämpfung (siehe Abschnitt 1.7.2). Somit machen wir die folgende wichtige Beobachtung: Man kann die Gravitation beim Aufstellen der dynamischen Gleichungen vernachlässigen, wenn man direkt die Auslenkung aus der Ruhelage betrachtet. I.e. für x =Auslenkung aus der Ruhelage ergibt sich für das obige System die Differentialgleichung

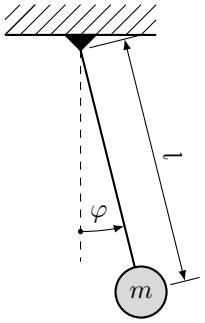
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Drehbewegung und Pendel. Für die Drehbewegung eines starren Körpers um eine feste Achse gilt analog zu $F = ma$ die Gleichung

$$M = I\ddot{\varphi},$$

wobei wir mit φ den Drehwinkel, mit M das resultierende Drehmoment bezüglich der Drehachse und mit I das Massenträgheitsmoment bezüglich der Drehachse bezeichnen. Das Drehmoment einer Kraft ist das Produkt aus dem Betrag der Kraft und ihrem Hebelarm, i.e. dem senkrechten Abstand der Wirkungslinie der Kraft von der Drehachse. Wie bei den Kräften wählen wir eine positive Drehrichtung und versehen die Drehmomente mit dem entsprechenden Vorzeichen. Für eine Punktmasse m im Abstand l von der Drehachse gilt $I = ml^2$.

Als Beispiel betrachten wir das mathematische Pendel: Eine Punktmasse m ist an einem masselosen Stab der Länge l reibungsfrei drehbar aufgehängt. Wir bezeichnen mit $\varphi(t)$ den Auslenkungswinkel aus der Ruhelage $\varphi = 0$:



Auf die Masse wirkt die Gewichtskraft mg vertikal nach unten. Ihr Hebelarm bezüglich der Aufhängung ist $l\sin(\varphi)$ und für $\varphi > 0$ dreht sie das Pendel zurück in Richtung Ruhelage, i.e. in negativer Drehrichtung. Die Stabkraft wirkt entlang des Stabes, ihre Wirkungslinie geht durch die Drehachse und sie erzeugt somit kein Drehmoment. Es folgt

$$M = -mgl\sin(\varphi).$$

Zusammen mit $I = ml^2$ wird die Gleichung $M = I\ddot{\varphi}$ zu

$$-mgl\sin(\varphi) = ml^2\ddot{\varphi}, \qquad \text{i.e.} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist wegen des Terms $\sin(\varphi)$ nicht linear. Für kleine Auslenkungen gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi$ (φ im Bogenmass) und wir erhalten die lineare Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Dies ist der Fall $p = 0$, $q > 0$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ und die allgemeine Lösung lautet

$$\varphi(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t).$$

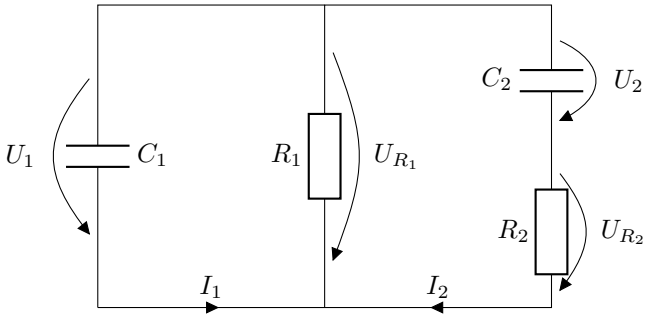
Die Periodendauer der Schwingung ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Sie hängt nicht von der Masse m und (für kleine Auslenkungen) nicht von der Amplitude ab.

1.9. **Systeme von Differentialgleichungen.**

1.9.1. *Einführendes Beispiel.* Wir betrachten den folgenden Schaltkreis:



Der Maschensatz angewendet auf die rechte Masche ist $U_2 + U_{R_2} = U_{R_1}$, der Maschensatz angewendet auf die linke Masche ist $U_1 = U_{R_1}$. Mit $U_{R_1} = -R_1(I_1 + I_2)$ und $U_{R_2} = R_2 I_2$

Mathematik 1, Lisibach André

ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Ströme durch die beiden Kondensatoren in Abhängigkeit der Spannungen:

$$\begin{cases} I_1 = -\dfrac{1}{R_1}U_1 + \dfrac{1}{R_2}(U_2 - U_1), \\ I_2 = \dfrac{1}{R_2}(U_1 - U_2). \end{cases}$$

Für einen Kondensator der Kapazität C gilt $U = \frac{Q}{C}$. Die Ableitung nach der Zeit ergibt $U' = \frac{Q'}{C} = \frac{I}{C}$ und somit gilt für den Strom $I = CU'$. Eingesetzt für die linken Seiten im obigen Gleichungssystem ergibt das folgende System von Differentialgleichungen für die Spannungen an den Kondensatoren:

$$\begin{cases} U_1' = -\dfrac{1}{R_1C_1}U_1 + \dfrac{1}{R_2C_1}(U_2 - U_1), \\ U_2' = \dfrac{1}{R_2C_2}(U_1 - U_2). \end{cases}$$

1.9.2. *Matrixschreibweise.* Ein lineares, homogenes System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases}$$

Mit

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

lässt sich das Gleichungssystem schreiben als

$$\overrightarrow{y}'(x) = A\overrightarrow{y}(x).$$

Diese Schreibweise heisst *Matrixschreibweise*, die Matrix A heisst *Koeffizientenmatrix*. Die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen ist somit eine vektorwertige Funktion $\overrightarrow{y}(x)$. Für ein System von n Gleichungen ist $\overrightarrow{y}(x)$ ein Vektor mit n Komponenten und A eine $n \times n$-Matrix.

Für das einführende Beispiel der Kondensatorspannungen mit $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C_1 = 1$ und $C_2 = 1/2$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} U_1' = -U_1 + \dfrac{1}{2}(U_2 - U_1), \\ U_2' = U_1 - U_2. \end{cases}$$

In Matrixschreibweise

$$\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U},$$

wobei

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung zur Linearität. Seien $\overrightarrow{u}(x)$, $\overrightarrow{v}(x)$ Lösungen von $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ und $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann sind auch $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ und $a\overrightarrow{u}$ Lösungen, denn

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})' = A\overrightarrow{u} + A\overrightarrow{v} = A(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}), \qquad (a\overrightarrow{u})' = aA\overrightarrow{u} = A(a\overrightarrow{u}).$$

Insbesondere ist jede Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung (*Superpositionsprinzip*).

1.9.3. *Entkoppeltes System.* Ein System von Differentialgleichungen, welches in der Form $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ mit A eine Diagonalmatrix geschrieben werden kann, heisst *entkoppeltes* System. Als Beispiel betrachten wir

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \qquad \text{wobei} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Als Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1, \\ y_2' = -5y_2. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen können unabhängig voneinander gelöst werden, i.e. das System ist entkoppelt. Wir haben

$$y_1 = C_1 e^{3x}, \qquad y_2 = C_2 e^{-5x}.$$

In Vektorform

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} \\ C_2 e^{-5x} \end{pmatrix},$$

oder

$$\overrightarrow{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5x}.$$

1.9.4. *Allgemeiner Fall.* Wir betrachten $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ und machen für die Lösung den Ansatz

$$\overrightarrow{y}(x) = \overrightarrow{v} e^{\lambda x}, \qquad \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}.$$

Eingesetzt in die Gleichung $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ ergibt

$$\lambda \overrightarrow{v} e^{\lambda x} = A\overrightarrow{v} e^{\lambda x},$$

i.e.

$$\lambda \overrightarrow{v} = A\overrightarrow{v}.$$

Somit ist $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{v} e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung von $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$, wenn $\overrightarrow{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ ist.

Für eine konkrete Rechnung betrachten wir wieder das einführende Beispiel der Kondensatorspannungen mit $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C_1 = 1$ und $C_2 = 1/2$. Das Gleichungssystem ist $\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U}$, wobei

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind gegeben durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, i.e. durch (wir bezeichnen mit $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix)

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0.$$

Es folgt $\lambda_+ = -1/2$, $\lambda_- = -2$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind Lösungen der linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_\pm \mathbb{1})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Wir wählen von den Lösungen jeweils einen Eigenvektor aus:

$$\overrightarrow{f}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{f}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I.e. wir finden die Lösungen

$$\overrightarrow{U}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}x}, \qquad \overrightarrow{U}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Wie oben gezeigt ist nun eine Linearkombination dieser Lösungen auch eine Lösung, i.e. die vektorwertige Funktion

$$\overrightarrow{U}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

ist auch eine Lösung. Diese Lösung beinhaltet zwei Konstanten. Da wir ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung betrachten, erwarten wir eine allgemeine Lösung mit zwei Konstanten. In der Tat ist die vorangehende Funktion $\overrightarrow{U}(x)$ die allgemeine Lösung von $\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U}$ (siehe Struktur der Lösung unten).

Mathematik 1, Lisibach André

Werden für ein Gleichungssystem auch Anfangsbedingungen vorgegeben, so ergibt sich durch diese Bedingungen ein Gleichungssystem für die auftretenden Konstanten in der allgemeinen Lösung. Beispielsweise sei für das obige Gleichungssystem der Kondensatoren gefordert, dass die Spannungen zum Anfangszeitpunkt gegeben sind als

$$U_1(0) = 5, \qquad U_2(0) = 4.$$

In Vektorschreibweise:

$$\overrightarrow{U}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in die allgemeine Lösung

$$\overrightarrow{U}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5, \\ 2C_1 - C_2 = 4 \end{cases}$$

mit Lösung $C_1 = 3$, $C_2 = 2$. Somit lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$\overrightarrow{U}(x) = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

1.9.5. *Transformation von Gleichungen auf ein System erster Ordnung.* Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung kann auf ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung transformiert werden. Wir illustrieren das Vorgehen an zwei Beispielen:

(i) Wir betrachten die Differentialgleichung des Feder-Masse-Systems (ohne Reibung). Diese ist $my'' + ky = 0$. Mit $q = k/m$:

$$y'' + qy = 0.$$

Wir definieren Funktionen y_1, y_2 als

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y'.$$

Für diese neuen Funktionen gilt

$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2, \\ y_2' &= y'' = -qy = -qy_1, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Differentialgleichung verwendet haben. Somit erfüllen die Funktionen y_1, y_2 das Gleichungssystem

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -qy_1. \end{cases}$$

In Matrixschreibweise geschrieben ist dies $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$, wobei

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + 3y' - 4y = 0.$$

Wir definieren Funktionen y_1, y_2, y_3 als

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y', \qquad y_3 = y''.$$

Für die Funktionen y_1, y_2, y_3 gilt

$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2, \\ y_2' &= y'' = y_3, \\ y_3' &= y''' = 2y'' - 3y' + 4y = 2y_3 - 3y_2 + 4y_1, \end{aligned}$$

Mathematik 1, Lisibach André

wobei wir in der letzten Zeile die Differentialgleichung verwendet haben. I.e. die Funktionen y_1, y_2, y_3 erfüllen das System

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = 2y_3 - 3y_2 + 4y_1. \end{cases}$$

In Matrixschreibweise ist dies $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$, wobei

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.9.6. *Die Situation komplexer Eigenwerte.* Wir illustrieren den Fall komplexer Eigenwerte der Matrix A in $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ am Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist das Gleichungssystem, welches das Feder-Masse-System (ohne Dämpfung) mit $k/m = q = 4$ beschreibt. Aus $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 + 4 \stackrel{!}{=} 0$ ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_\pm = \pm 2j$. Da A reell ist, hat das charakteristische Polynom reelle Koeffizienten und die Eigenwerte sind konjugiert komplex, i.e. $\lambda_- = \overline{\lambda_+}$.

Für $\lambda_+ = 2j$ ist die erweiterte Matrix des Gleichungssystems $(A - \lambda_+\mathbb{1})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ mit reduzierter Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2j & 1 & 0 \\ -4 & -2j & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & j/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösung ist $\overrightarrow{v} = t\begin{pmatrix} -j \\ 2 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter t. Wir wählen den Eigenvektor

$$\overrightarrow{f}_+ = \begin{pmatrix} -j \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Konjugieren der Gleichung $A\overrightarrow{f}_+ = \lambda_+\overrightarrow{f}_+$ ergibt wegen $\overline{A} = A$

$$A\overline{\overrightarrow{f}_+} = \lambda_-\overline{\overrightarrow{f}_+}.$$

I.e. der konjugiert komplexe Vektor ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_- und wir wählen

$$\overrightarrow{f}_- = \overline{\overrightarrow{f}_+} = \begin{pmatrix} j \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir die (komplexen) Lösungen

$$\tilde{\overrightarrow{y}}_1(x) = \overrightarrow{f}_+ e^{\lambda_+ x}, \qquad \tilde{\overrightarrow{y}}_2(x) = \overrightarrow{f}_- e^{\lambda_- x} = \overline{\tilde{\overrightarrow{y}}_1(x)}.$$

Die Rechnung in der Bemerkung zur Linearität gilt ebenso für komplexe Konstanten a. Somit sind auch

$$\overrightarrow{y}_1(x) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{\overrightarrow{y}}_1(x) + \tilde{\overrightarrow{y}}_2(x)\Big) = \operatorname{Re}\tilde{\overrightarrow{y}}_1(x),$$
$$\overrightarrow{y}_2(x) = \frac{1}{2j}\Big(\tilde{\overrightarrow{y}}_1(x) - \tilde{\overrightarrow{y}}_2(x)\Big) = \operatorname{Im}\tilde{\overrightarrow{y}}_1(x)$$

Lösungen, und diese sind reell. Aus

$$\tilde{\overrightarrow{y}}_1(x) = \begin{pmatrix} -j \\ 2 \end{pmatrix}\Big(\cos(2x) + j\sin(2x)\Big) = \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ 2\cos(2x) \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} -\cos(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix}$$

lesen wir ab

$$\overrightarrow{y}_1(x) = \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ 2\cos(2x) \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -\cos(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\overrightarrow{y}(x) = C_1\begin{pmatrix} \sin(2x) \\ 2\cos(2x) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -\cos(2x) \\ 2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Für die Beschreibung des Feder-Masse-Systems ist die erste Komponente $y_1(x) = y(x)$ die Auslenkung der Masse aus der Ruhelage. I.e. wir finden für die Auslenkung aus der Ruhelage

$$y(x) = C_1 \sin(2x) - C_2 \cos(2x).$$

Bis auf die Bezeichnung der Konstanten ist dies das Ergebnis der direkten Betrachtung der Differentialgleichung zweiter Ordnung im Fall (iii) mit $\alpha = 0$, $\beta = 2$ (siehe Seite 17).

1.9.7. *Struktur der Lösung.* Allgemein gilt das Folgende: Das System $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ mit A einer reellen $n \times n$-Matrix hat n linear unabhängige Lösungen

$$\overrightarrow{y}_1(x), \overrightarrow{y}_2(x), \ldots, \overrightarrow{y}_n(x).$$

Die allgemeine Lösung von $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ lautet

$$\overrightarrow{y}(x) = C_1 \overrightarrow{y}_1(x) + C_2 \overrightarrow{y}_2(x) + \ldots + C_n \overrightarrow{y}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \overrightarrow{y}_i(x).$$

Sind die Eigenwerte von A paarweise verschieden, so findet man diese Lösungen wie folgt:

- Zu einem reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit Eigenvektor $\overrightarrow{u}$ gehört die Lösung

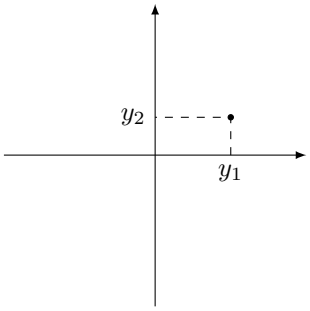
$$\overrightarrow{u}\, e^{\lambda x}.$$

- Zu einem Paar komplexer Eigenwerte $\alpha \pm j\beta$ mit $\beta \neq 0$ sei $\overrightarrow{u} + j\overrightarrow{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha + j\beta$ (dann ist $\overrightarrow{u} - j\overrightarrow{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha - j\beta$). Real- und Imaginärteil von $(\overrightarrow{u} + j\overrightarrow{v})e^{(\alpha+j\beta)x}$ ergeben die zwei reellen Lösungen

$$e^{\alpha x}\Big(\cos(\beta x)\overrightarrow{u} - \sin(\beta x)\overrightarrow{v}\Big),$$
$$e^{\alpha x}\Big(\sin(\beta x)\overrightarrow{u} + \cos(\beta x)\overrightarrow{v}\Big).$$

Den Fall mehrfacher Eigenwerte behandeln wir nicht.

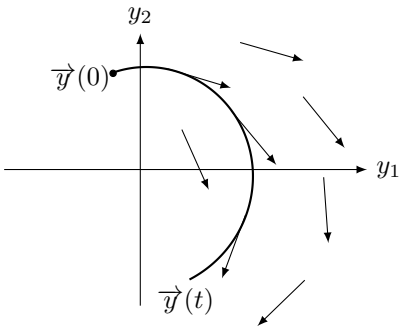
1.9.8. *Phasenraum.* Allgemein heisst die Menge aller möglichen Zustände eines dynamischen Systems *Phasenraum*. Für ein System $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ von zwei Gleichungen ist ein Zustand gegeben durch einen Vektor $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Somit entspricht ein Zustand des Systems einem Punkt in der Ebene mit kartesischen Koordinaten (y_1, y_2):



Der Phasenraum für ein System von n Gleichungen erster Ordnung ist $\mathbb{R}^n$. Die Entwicklung des Zustandes, gegeben durch eine partikuläre Lösung $\overrightarrow{y}(x)$, ergibt eine Kurve im Phasenraum. Wegen $\overrightarrow{y}'(x) = A\overrightarrow{y}(x)$ ist der Vektor $A\overrightarrow{y}$ in jedem Punkt tangential an

Mathematik 1, Lisibach André

diese Kurve.



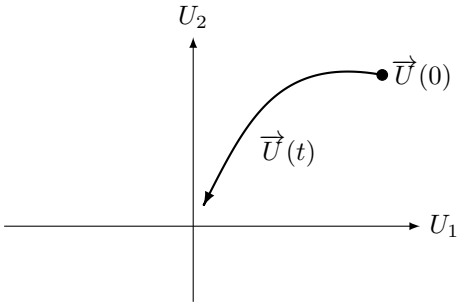
Als konkretes Beispiel betrachten wir ein weiteres Mal das Differentialgleichungssystem, welches die Spannungen an zwei Kondensatoren beschreibt (siehe Beginn dieses Abschnitts). Das System ist $\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U}$, wobei

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

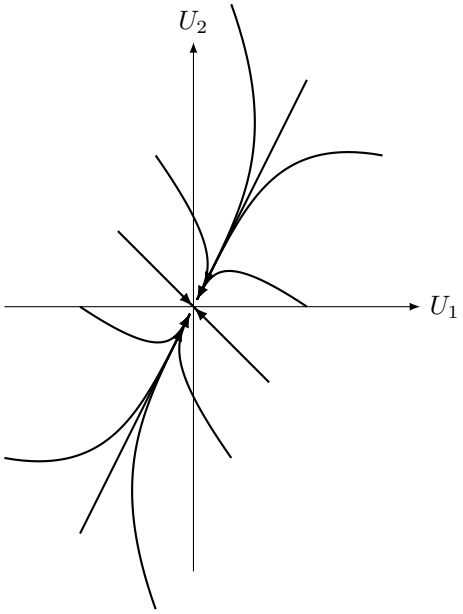
Die partikuläre Lösung zur Anfangsbedingung $\overrightarrow{U}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\overrightarrow{U}(x) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Die entsprechende Kurve im Phasenraum ist



Werden andere Anfangsbedingungen $\overrightarrow{U}(0)$ verwendet, so ergeben sich folgende Typen von Kurven:



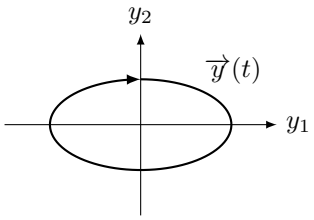
Den Kurven ist gemeinsam, dass sie für $x \to \infty$ gegen den Ursprung konvergieren. Dies folgt direkt aus $\lambda_\pm < 0$. Der Ursprung $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$ entspricht einem *Fixpunkt* des Systems,

Mathematik 1, Lisibach André

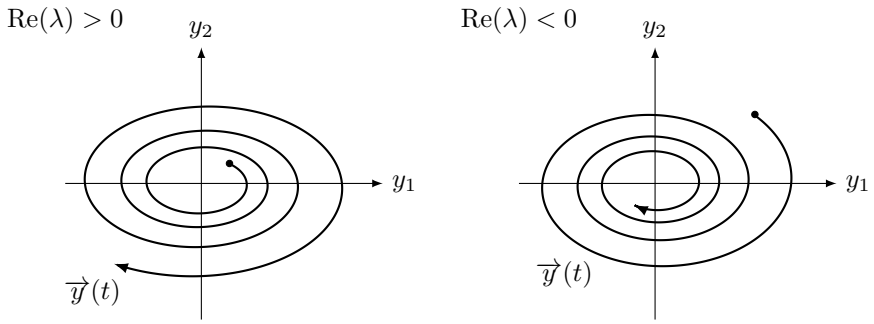
i.e. einem Punkt im Phasenraum, in welchem $\overrightarrow{U}' = \overrightarrow{0}$ gilt. Physikalisch entspricht ein Fixpunkt eines dynamischen Systems einem Zustand, welchen das System ohne Einwirkung von aussen nicht verlässt. Im Fall $\lambda_\pm < 0$ konvergiert die Lösung gegen den Fixpunkt, man spricht von einem *Attraktor*, der Fixpunkt ist *stabil*.

Im Fall $\lambda_\pm > 0$ entfernen sich die Lösungen für Anfangsbedingungen in der Nähe des Fixpunktes von diesem. Man spricht von einem *Repeller*, der Fixpunkt ist *instabil*. Im Fall $\lambda_+ > 0$, $\lambda_- < 0$ spricht man von einem *Sattelpunkt*. Auch dieser ist *instabil*: Nur für Anfangsbedingungen auf der Geraden durch den Ursprung in Richtung $\overrightarrow{f}_-$ konvergiert die Lösung gegen den Fixpunkt. In der Praxis ist es jedoch nicht möglich, die Anfangsbedingungen genau auf dieser Geraden zu platzieren.

Im Fall komplexer Eigenwerte $\lambda_\pm = \alpha \pm j\beta$ mit $\beta \neq 0$ ergeben sich oszillierende Lösungen. Für $\alpha = 0$ sind die Kurven im Phasenraum geschlossen (ein Beispiel ist das Feder-Masse-System ohne Dämpfung aus dem Abschnitt über komplexe Eigenwerte). Der Fixpunkt ist stabil, aber kein Attraktor:



Für $\alpha < 0$ ergeben sich Spiralen gegen den Ursprung (Attraktor, stabil), für $\alpha > 0$ Spiralen nach aussen (Repeller, instabil):



1.9.9. *Inhomogene Systeme.* Ein lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist allgemein von der Form

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{r}(x).$$

Die vektorwertige Funktion $\overrightarrow{r}(x)$ heisst *Störfunktion*. Das System heisst *homogen* falls $\overrightarrow{r}(x) \equiv \overrightarrow{0}$, ansonsten *inhomogen*.

Für die Struktur der Lösung gilt dasselbe wie bei den linearen Gleichungen erster und zweiter Ordnung: Sei $\overrightarrow{y}_i(x)$ eine Lösung des inhomogenen Systems und sei $\overrightarrow{y}_h(x) = C_1\overrightarrow{y}_1(x) + \ldots + C_n\overrightarrow{y}_n(x)$ die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$. Dann ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems gegeben durch

$$\overrightarrow{y}(x) = \overrightarrow{y}_i(x) + \overrightarrow{y}_h(x).$$

Das Argument ist dasselbe wie früher und verwendet nur die Linearität: Es gilt

$$(\overrightarrow{y}_i + \overrightarrow{y}_h)' = A\overrightarrow{y}_i + \overrightarrow{r}(x) + A\overrightarrow{y}_h = A(\overrightarrow{y}_i + \overrightarrow{y}_h) + \overrightarrow{r}(x),$$

und für zwei Lösungen $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{y}_i$ des inhomogenen Systems gilt $(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y}_i)' = A(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y}_i)$, i.e. $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y}_i$ ist eine Lösung des homogenen Systems.

Wir betrachten zwei Beispiele:

(i) Wir betrachten die inhomogene Gleichung zweiter Ordnung

$$y'' + py' + qy = r(x).$$

Mathematik 1, Lisibach André

Mit $y_1 = y$, $y_2 = y'$ gilt

$$y_1' = y' = y_2,$$
$$y_2' = y'' = -qy - py' + r(x) = -qy_1 - py_2 + r(x),$$

wobei wir in der letzten Zeile die Differentialgleichung verwendet haben. In Matrixschreibweise ist dies

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{r}(x), \qquad \text{wobei} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{r}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}.$$

Die äussere Anregung $r(x)$ erscheint somit in der zweiten Komponente der Störfunktion.

(ii) Wir betrachten das System mit der Koeffizientenmatrix aus dem Beispiel der Kondensatoren und einer konstanten Störfunktion:

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{r}, \qquad \text{wobei} \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Störfunktion konstant ist, machen wir für eine Lösung des inhomogenen Systems den Ansatz eines konstanten Vektors $\overrightarrow{y}_i(x) = \overrightarrow{c}$. Eingesetzt ergibt sich wegen $\overrightarrow{c}\,' = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{0} = A\overrightarrow{c} + \overrightarrow{r}, \qquad \text{i.e.} \qquad A\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{r}.$$

Als Gleichungssystem:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2}c_1 + \dfrac{1}{2}c_2 = -2, \\ \qquad c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

mit Lösung $c_1 = c_2 = 2$. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems kennen wir bereits. Somit lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Für $x \to \infty$ konvergieren alle Lösungen gegen $\overrightarrow{c}$. Der Punkt $\overrightarrow{c}$ ist ein Fixpunkt des inhomogenen Systems, denn dort gilt $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{c} + \overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$. Im Phasenraum ergeben sich somit dieselben Kurven wie für das homogene System, jedoch verschoben um $\overrightarrow{c}$: Der Fixpunkt liegt nicht mehr im Ursprung, sondern im Punkt $(2, 2)$, und er ist wiederum ein Attraktor.

Allgemein gilt: Ist die Störfunktion $\overrightarrow{r}$ konstant und ist $\det(A) \neq 0$, so hat das inhomogene System genau einen Fixpunkt $\overrightarrow{c}$, gegeben durch $A\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{r}$. Seine Stabilität wird durch die Eigenwerte von A bestimmt, genau wie beim Fixpunkt im Ursprung für das homogene System.

1.9.10. *Numerische Lösung.* Wir betrachten Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{cases} \overrightarrow{y}' = \overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}), \\ \overrightarrow{y}(x_0) = \overrightarrow{y}_0, \end{cases}$$

wobei

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \overrightarrow{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \overrightarrow{y}) \end{pmatrix}.$$

Dies ist dieselbe Form wie im Abschnitt zur numerischen Lösung eines Anfangswertproblems, nur dass y und f nun Vektoren sind. Beispiele:

- Für ein lineares homogenes System ist $\overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}) = A\overrightarrow{y}$, für ein lineares inhomogenes System ist $\overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y}) = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{r}(x)$.

Mathematik 1, Lisibach André

- Die Gleichung des mathematischen Pendels $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$ ist nicht linear. Mit $y_1 = \varphi$, $y_2 = \dot{\varphi}$ erhalten wir wie bei der Transformation auf ein System erster Ordnung

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l}\sin(y_1) \end{pmatrix}.$$

  Dieses System lässt sich nicht mit den Methoden der vorangehenden Abschnitte lösen, numerisch aber ohne weiteres.

Die Methode von Euler überträgt sich wörtlich, indem y durch $\overrightarrow{y}$ und f durch $\overrightarrow{f}$ ersetzt wird. Der Index k bezeichnet dabei den Schritt, i.e. $\overrightarrow{y}_k$ ist die Approximation für $\overrightarrow{y}(x_k)$. Die Methode von Euler lautet

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h, \\ \overrightarrow{y}_{k+1} &= \overrightarrow{y}_k + h\overrightarrow{f}(x_k, \overrightarrow{y}_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Geometrisch bedeutet dies: Im Phasenraum gehen wir vom Punkt $\overrightarrow{y}_k$ ein Stück in Richtung des Tangentialvektors $\overrightarrow{f}(x_k, \overrightarrow{y}_k)$. Ebenso übertragen sich die Methoden von Heun sowie Runge und Kutta, und die Aussagen zur Genauigkeit gelten unverändert.

Als Beispiel betrachten wir das Feder-Masse-System ohne Dämpfung $y'' + y = 0$ mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Als System geschrieben ist dies

$$\overrightarrow{y}' = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die exakte Lösung ist $y_1(x) = \cos(x)$, $y_2(x) = -\sin(x)$, die Kurve im Phasenraum ist somit der Einheitskreis. Mit der Methode von Euler und der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y}_1 &= \overrightarrow{y}_0 + h\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{y}_2 &= \overrightarrow{y}_1 + h\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Punkte $\overrightarrow{y}_1$, $\overrightarrow{y}_2$ liegen ausserhalb des Einheitskreises.

2. Aufgaben zu gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 1. Man bestimme die Ordnung der folgenden Differentialgleichungen für $y(x)$.

(i) $y' = x$
(ii) $y' + y = x$
(iii) $y'' = y$
(iv) $y' = y^2$
(v) $y''' + 2y' = e^{-x}$
(vi) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = x$

Aufgabe 2. Man schreibe die folgenden Gleichungen in Form einer expliziten Differentialgleichung, i.e. in der Form

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

und gebe die Funktion G an.

(i) $yy' = x$
(ii) $x^2y' = y + x$
(iii) $y' + y = x$
(iv) $\frac{d}{dx}(xy) = x$
(v) $y'' - y' = 0$
(vi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = x$
(vii) $\frac{d}{dx}\left(\log(xy) + y + 17x\right) = 0$

Aufgabe 3. Man prüfe dass die folgenden Funktionen Lösungen der jeweils angegebenen Differentialgleichung sind und gebe jeweils das grösste Intervall an, welches den Punkt $x = 0$ enthält und auf welchem die Lösung definiert ist.

(i) $y(x) = \frac{1}{1-x}$, Gleichung: $y' = y^2$
(ii) $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, Gleichung: $yy' + x = 0$

Aufgabe 4. Man gebe die allgemeine Lösung der Gleichung $xy' = 1$ für $x > 0$ an.

Aufgabe 5. Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen der Gleichung $y'' = 9y$?

(i) e^{3x}, (ii) e^{-3x}, (iii) $\sinh(3x)$, (iv) $\cosh(3x)$.

Hinweis:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Aufgabe 6. Man zeige dass $y(x) = xe^{-x}$ eine Lösung der Gleichung $y'' + 2y' + y = 0$ ist.

Aufgabe 7. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^3y'(x)\left(y''(x)\right)^2 = x + y(x).$$

(i) Man bestimme die Ordnung dieser Differentialgleichung.
(ii) Man zeige dass $y(x) = x\log(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 8. Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = -17y^2.$$

Man zeige dass im Allgemeinen $y_1(x) + y_2(x)$ keine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Mathematik 1, Lisibach André

Aufgabe 9. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0.$$

(i) Man zeige dass die folgenden Funktionen Lösungen dieser Differentialgleichungen sind (für $x > 0$):

$$y_0(x) = x^{-3/2}, \quad y_1(x) = x^{-1/2}, \quad y_2(x) = -9x^{-3/2}, \quad y_3(x) = 7x^{-1/2},$$
$$y_4(x) = -9x^{-3/2} + 7x^{-1/2}.$$

(ii) In Anbetracht dieser Lösungen finde man weitere Lösungen.

(iii) Man bestimme die eindeutige Lösung unter den Bedingungen

$$y(4) = 1/8, \qquad y'(4) = -3/64.$$

Aufgabe 10. Man entscheide, ob die angegebene Menge von Funktionen ($C \in \mathbb{R}$) die allgemeine Lösung der jeweiligen Differentialgleichung sein kann. Man begründe die Antwort.

(i) $y' = 2y, \qquad y(x) = e^{2x} + C$
(ii) $y'' = 0, \qquad y(x) = Cx$
(iii) $y' = \frac{y}{x}, \qquad y(x) = Cx$

Aufgabe 11. Man entscheide für die folgenden Probleme, ob es sich um ein Anfangswertproblem oder um ein Randwertproblem handelt.

(i) $y'' = x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
(ii) $y'' = x, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$
(iii) $y' = y, \qquad y(3) = 0$
(iv) $y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1$
(v) $y'' + y = 0, \qquad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 1$

Aufgabe 12. Wir betrachten einen beidseitig aufgelegten Balken der Länge L unter einer Einzellast in der Mitte. Die Auslenkung $y(x)$ erfüllt für $0 \le x \le L/2$ die Differentialgleichung

$$y''(x) = Kx, \qquad \text{mit} \qquad K = \frac{F}{2EI},$$

wobei F die Einzellast, E den Elastizitätsmodul und I das Flächenträgheitsmoment bezeichnen.

(i) Man bestimme die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(ii) Man überlege sich die zwei Bedingungen, welche die Lösung erfüllen muss, und bestimme die zugehörige partikuläre Lösung.

(iii) Man bestimme die Auslenkung in der Balkenmitte.

Aufgabe 13. Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = x + y.$$

(i) Man skizziere das Richtungsfeld im Bereich $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.

(ii) Man skizziere die Lösungskurven zu den Anfangsbedingungen $y(0) = -2, -1, 0$ im betrachteten Gebiet.

(iii) Man bestimme das Langzeitverhalten von Lösungen für $x \to \infty$ in Abhängigkeit von Anfangsbedingungen $y(0)$.

Aufgabe 14. Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y' = \sin(x).$$

(i) Man skizziere das Richtungsfeld im Gebiet $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [-2, 2]$.

Mathematik 1, Lisibach André

(ii) Man bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung.
(iii) Man bestimme die partikuläre Lösung zu der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und skizziere diese im Richtungsfeld.

Aufgabe 15. Wir betrachten den freien Fall einer Masse $m = 10$ mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit unter Einfluss des turbulenten Strömungswiderstandes in der Nähe der Marsoberfläche und interessieren uns für die Geschwindigkeit $v(t)$ dieser Masse. Der Strömungswiderstand ist proportional zu $v(t)^2$ und der Proportionalitätsfaktor sei -10 (negativ da entgegengesetzt zur Geschwindigkeitsrichtung). Für die Beschleunigung durch Gravitation setze man $g = 4$ (alle Angaben in SI-Einheiten).

(i) Man benutze das Newtonsche Gesetz und zeige dass die Differentialgleichung

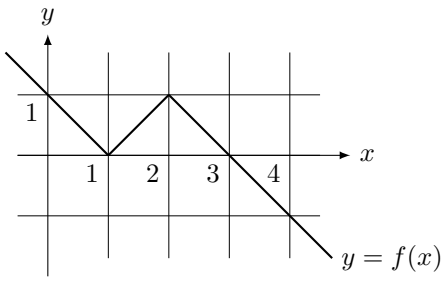
$$\frac{dv}{dt} = 4 - v^2$$

die Geschwindigkeit $v(t)$ beschreibt.
(ii) Man zeichne für diese Differentialgleichung (qualitativ) das Richtungsfeld im Bereich $(t, v) \in [0, 2] \times [0, 4]$.
(iii) Für die Anfangsbedingungen $v(0) = 0$, $v(0) = 2$ und $v(0) = 4$ zeichne man qualitativ die Lösungen ein und bestimme das Langzeitverhalten.

Aufgabe 16. Man betrachte die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

wobei die Funktion $f(x)$ durch den folgenden Graphen gegeben ist:



(i) Man skizziere das Richtungsfeld für den Bereich $(t, x) \in [0, 3] \times [0, 4]$.
(ii) Man skizziere die drei Lösungskurven zu den Anfangswerten $x_0 = 0.2, 1.2, 3.8$.
(iii) Man bestimme den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ für die gegebenen Anfangswerte.

Aufgabe 17. Man betrachte die Differentialgleichung

$$y' = y.$$

(i) Man zeichne (qualitativ) das Richtungsfeld.
(ii) Man zeichne Lösungskurven zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, 2, 1/2, -1$ ein.
(iii) Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 18. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1$$

und die Schrittweite $h = 1$.

(i) Man berechne y_1 und y_2 nach der Methode von Euler.
(ii) Man berechne y_1 und y_2 nach der Methode von Heun.

Mathematik 1, Lisibach André

Aufgabe 19. Man finde die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = (1+x^2)xy^2.$$

Aufgabe 20. Man versuche die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+y}{x-y}$$

mit der Methode der Separation der Variablen zu lösen.

Aufgabe 21. Man löse die folgenden Gleichungen:

(i) $x^2y' = y^2$
(ii) $y'(1+x^2) = xy$
(iii) $y'\sin(y) = -x$
(iv) $y' - \sqrt{y} = 0$

Aufgabe 22. Glukose wird vom Körper mit einer Rate aufgenommen, welche proportional ist zur vorhandenen Glukosemenge im Blutstrom. Sei λ die dazugehörige Proportionalitätskonstante. Wir nehmen an zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Glukosemenge im Blutstrom G_0.

(i) Man stelle eine Differentialgleichung auf, welche die Glukosemenge im Blutstrom in Abhängigkeit der Zeit beschreibt und löse diese.
(ii) Es werde intravenös Glukose mit einer konstanten Rate r injiziert. Man stelle wieder eine Differentialgleichung auf, welche diese neue Situation beschreibt und löse diese.

Aufgabe 23. Man bestimme die allgemeine und partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y' - 3xy + 2y = 0, \qquad y(0) = 1$
(ii) $y' = 9y^2 - 4, \qquad y(0) = 2/3$
Hinweis: Für die Integration in y verwende man Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 24. Ein kugelförmiger Wassertropfen fällt durch wasserhaltige Luft (eine Wolke) und nimmt dabei Wasser auf. Man nehme an, dass die Menge des pro Zeiteinheit aufgenommenen Wassers proportional ist zur Oberfläche des Tropfens. Man finde und löse die Differentialgleichung für den Radius r in Abhängigkeit der Zeit t.

Aufgabe 25. Für einen adiabatischen Vorgang mit einem idealen Gas (Volumen V, Druck p) gilt

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{c_p}{c_V}\frac{p}{V},$$

wobei c_p und c_V zwei Konstanten sind (spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck und spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen).

(i) Man bestimme den Druck p als Funktion des Volumens V.
(ii) Man zeige dass $pV^\kappa =$ konst. für eine geeignete Konstante κ und bestimme diese.

Aufgabe 26. Man löse das Anfangswertproblem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y+1}, \qquad y(0) = 1,$$

und bestimme das grösste Intervall, welches den Punkt $x = 0$ enthält und auf welchem die Lösung definiert ist.

Mathematik 1, Lisibach André

Aufgabe 27. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$xy' = y + x.$$

(i) Ist diese Gleichung linear? Ist diese Gleichung separierbar? Man begründe die Antwort.
(ii) Man bestimme die allgemeine Lösung dieser Gleichung.
(iii) Man bestimme die partikuläre Lösung dieser Gleichung zur Anfangsbedingung $y(1) = 2$.

Aufgabe 28. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen mit der Methode des integrierenden Faktors. Bei (v) und (vi) bestimme man zusätzlich die partikuläre Lösung zur angegebenen Anfangsbedingung.

(i) $y' + \dfrac{y}{x} = 1$
(ii) $xy' - 2y = x^3$
(iii) $y' - 3y = e^{3x}$
(iv) $ty' + (t+1)y = t$
(v) $y' + 2xy = x, \qquad y(0) = 1$
(vi) $xy' + y = \sin(x), \qquad y(\pi) = 1$

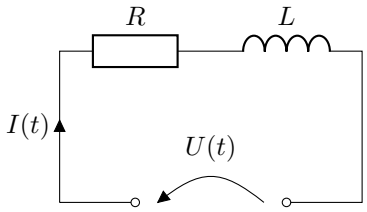
Aufgabe 29. Man finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Man gebe die Lösungen jeweils in der Form $y(x) = y_h(x) + y_i(x)$ an ($y_h(x)$: allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, $y_i(x)$: eine Lösung der inhomogenen Gleichung). Wo eine Anfangsbedingung angegeben ist, bestimme man zusätzlich die partikuläre Lösung.

(i) $y' - y = e^{2x}$
(ii) $y' + (x-1)y = 0$
(iii) $y' + y = x$
(iv) $y' - y = e^x, \quad y(1) = 0$
(v) $xy' + y + xe^x = 0, \quad y(1) = 0$
(vi) $xy' - (x+1)y - x^2 + x^3 = 0, \quad y(1) = 0$

Aufgabe 30. In einem R-L-Stromkreis mit Ohmschem Widerstand R und Induktivität L genügt die Stromstärke $I(t)$ der Differentialgleichung

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U.$$

Hier ist $U = U(t)$ die angelegte Spannung.



(i) Man bestimme die Stromstärke $I(t)$ bei konstanter Spannung $U(t) = \text{konst.} = U_0$ und $I(0) = 0$.
(ii) Man bestimme die Stromstärke $I(t)$ bei linear mit der Zeit ansteigender Spannung $U(t) = at$ $(a > 0)$ und $I(0) = 0$.
(iii) Man skizziere die Stromverläufe aus (i) und (ii) und bestimme das asymptotische Verhalten für grosse Zeiten.

Aufgabe 31. Ein PT_1-Regelkreisglied lässt sich durch die lineare Differentialgleichung

$$T\dot{v} + v = Ku$$

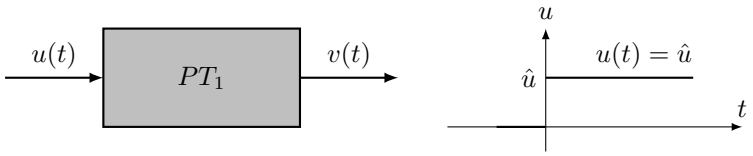
beschreiben. Hier ist $u = u(t)$ das Eingangssignal, $v = v(t)$ das Ausgangssignal und T, K sind Konstanten. Der schematische Aufbau ist untenstehend dargestellt. Man bestimme

Mathematik 1, Lisibach André

den zeitlichen Verlauf des Ausgangssignals $v(t)$ für $t \geq 0$, wenn das Eingangssignal eine sogenannte *Sprungfunktion* ist:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \hat{u} & t \geq 0. \end{cases}$$

Zu Beginn ($t = 0$) gilt $v(0) = 0$. Schematisch:



Aufgabe 32. Die Erwärmung eines Gleichstrommotors bei konstanter Verlustleistung P_v wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\tau \frac{dT}{dt}(t) + T(t) - T_1 = RP_v.$$

In dieser Gleichung ist τ eine thermische Zeitkonstante, T_1 die Anfangstemperatur des Motors, R der (konstante) Wärmewiderstand und $T(t)$ die Temperatur des Motors in Abhängigkeit der Zeit t.

Man bestimme den Temperaturverlauf des Motors in Abhängigkeit der Zeit t und der Konstanten R, P_v, T_1 und τ für $t \geq 0$ und skizziere diesen Verlauf.

Aufgabe 33. Eine Abbildung L, welche einer Funktion y eine Funktion $L(y)$ zuordnet, heisst *linear* falls

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \qquad \text{und} \qquad L(ay) = aL(y)$$

für alle Funktionen y_1, y_2, y und alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

(i) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Man begründe die Antwort.

(a) $L_1(y) = y' + xy$
(b) $L_2(y) = y' + y^2$
(c) $L_3(y) = y' + \sin(y)$
(d) $L_4(y) = xy' - 3y$

(ii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $L_a(y) = y' + ay^2 + xy$ linear?

Aufgabe 34. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' + 2xy = \cos(x) + 2x\sin(x)$. Man zeige, dass $\tilde{y}(x) = \sin(x)$ eine Lösung dieser Gleichung ist und bestimme damit die allgemeine Lösung.

Aufgabe 35. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = \pi$, $y'(0) = 0$.
(ii) $y'' - 20y' + 64y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
(iii) $4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0$, $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = -1$.
(iv) $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
(v) $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Aufgabe 36. Wir betrachten die Gleichung $y'' + py' + qy = 0$ im Fall $p^2 - 4q = 0$, i.e. die charakteristische Gleichung besitzt die doppelte Lösung $\lambda = -\frac{p}{2}$.

(i) Man zeige, dass $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ eine Lösung der Gleichung ist.
(ii) Man zeige, dass $y_1(x) = e^{\lambda x}$ und $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ linear unabhängig sind.

Mathematik 1, Lisibach André

Aufgabe 37. Man bestimme die Konstanten p, q so, dass $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Basislösungen der Gleichung $y'' + py' + qy = 0$ sind.

(i) $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-3x}$
(ii) $y_1(x) = e^{3x}$, $y_2(x) = xe^{3x}$
(iii) $y_1(x) = e^{-x}\cos(2x)$, $y_2(x) = e^{-x}\sin(2x)$
(iv) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^{4x}$
(v) $y_1(x) = \cos(3x)$, $y_2(x) = \sin(3x)$

Aufgabe 38. Ein Feder-Masse-Dämpfungssystem besitze die Masse $m = 2$ und die Federkonstante $k = 8$. Alle Angaben sind in SI-Grundeinheiten.

(i) Man bestimme die Eigenfrequenz ω_0 und den Reibungskoeffizienten δ, für welchen kritische Dämpfung vorliegt.
(ii) Man bestimme für die Reibungskoeffizienten $\delta = 4$, $\delta = 8$ und $\delta = 12$ jeweils den Dämpfungsfall und die allgemeine Lösung.
(iii) Ein mechanisches Feder-Masse-Dämpfungs-System soll möglichst schnell in die Ruhelage zurückgeführt werden, ohne dass es darüber hinaus schwingt. Welcher Dämpfungsfall ist zu wählen? Man begründe.

Aufgabe 39. Ein Feder-Masse-Dämpfungssystem besitze die Masse $m = 1$, die Federkonstante $k = 25$ und den Reibungskoeffizienten $\delta = 6$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Auslenkung $y(0) = 3$ und die Geschwindigkeit $y'(0) = 7$. Alle Angaben sind in SI-Grundeinheiten. Man bestimme die Auslenkung $y(t)$.

Aufgabe 40. Bei kritischer Dämpfung lautet die allgemeine Lösung für die Auslenkung

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\Delta t}.$$

Man finde die Lösung $y(t)$ zu den Anfangsbedingungen $y(0) = A > 0$ und

(i) $y'(0) = 0$, (ii) $y'(0) = B > 0$, (iii) $y'(0) = D < 0$

und skizziere jeweils den Graphen. Für welche $D < 0$ gibt es in (iii) einen Nulldurchgang, i.e. ein $t_0 > 0$ so dass $y(t_0) = 0$?

Aufgabe 41. Wir betrachten das Feder-Masse-Dämpfungssystem

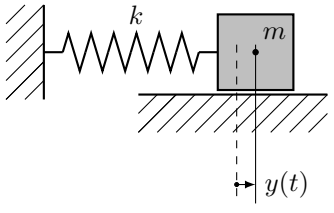
$$y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

mit starker Dämpfung, i.e. $\left(\frac{\delta}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m} > 0$.

(i) Man bestimme die allgemeine Lösung.
(ii) Man bestimme die Lösung mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = v_0 > 0$.
(iii) Man bestimme den Umkehrpunkt, i.e. den Zeitpunkt $t^* > 0$ mit $y'(t^*) = 0$, und skizziere den Graphen der Lösung aus (ii).

Hinweis: Man schreibe die Lösungen mit Hilfe der Lösungen $\lambda_1 > \lambda_2$ der charakteristischen Gleichung.

Aufgabe 42. Wir betrachten das folgende mechanische System bestehend aus Masse und Feder, wobei die Reibung vernachlässigt wird:



Mathematik 1, Lisibach André

Die Masse sei $m = 2$ und die Federkonstante sei $k = 18$. Wir bezeichnen mit $y(t)$ die Auslenkung aus der (gestrichelt eingezeichneten) Ruhelage. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Masse um 1 nach rechts ausgelenkt und bewegt sich mit der Geschwindigkeit 3 nach rechts. Alle Angaben sind in SI-Grundeinheiten.

(i) Man stelle die Differentialgleichung für $y(t)$ auf.
(ii) Man bestimme $y(t)$.
(iii) Man bestimme die Periode der Schwingung.
(iv) Man bestimme den ersten Zeitpunkt $t^* > 0$, zu welchem sich die Masse in der Ruhelage befindet.
(v) Man bestimme die maximale Auslenkung der Masse und den ersten Zeitpunkt $\tilde{t} > 0$, zu welchem sie erreicht wird.

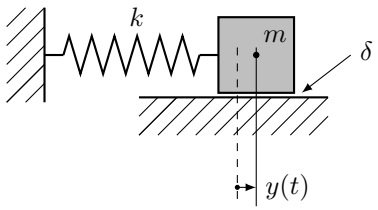
Aufgabe 43. Eine sehr lange Kühlrippe (z.B. ein Metallstab auf einem Prozessor) ist bei $x = 0$ mit einer warmen Oberfläche verbunden und gibt entlang ihrer Länge Wärme an die umgebende Luft mit der Temperatur T_∞ ab. Wir bezeichnen mit $T(x)$ die Temperatur in der Rippe im Abstand x von der Oberfläche und mit $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ die Übertemperatur. Unter vereinfachenden Annahmen gilt

$$\theta'' - m^2\theta = 0,$$

wobei $m > 0$ eine Konstante ist, welche vom Material und von der Geometrie der Rippe abhängt. Am Fuss der Rippe beträgt die Übertemperatur $\theta(0) = \theta_0 > 0$.

(i) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
(ii) Wir modellieren die Rippe als unendlich lang und verlangen, dass $\theta(x)$ für $x \to \infty$ beschränkt bleibt. Man bestimme $\theta(x)$.
(iii) Man bestimme den Abstand $x_{1/2}$, bei welchem die Übertemperatur auf die Hälfte von θ_0 gefallen ist.
(iv) Man bestimme den Abstand x_1, bei welchem die Übertemperatur auf ein Prozent von θ_0 gefallen ist. Was bedeutet dies für die sinnvolle Länge einer Rippe?

Aufgabe 44. Wir betrachten das folgende mechanische System bestehend aus Masse, Feder und geschwindigkeitsproportionaler Reibung:



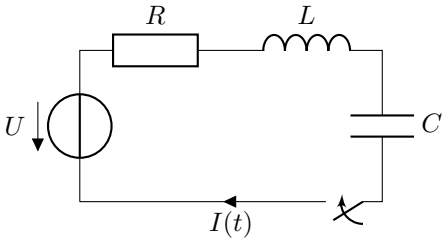
Die Masse sei $m = 4$, der Reibungskoeffizient sei $\delta = 16$ und die Federkonstante sei $k = 7$. Wir bezeichnen mit $y(t)$ die Auslenkung aus der (gestrichelt eingezeichneten) Ruhelage. Alle Angaben sind in SI-Grundeinheiten.

(i) Man stelle die Differentialgleichung für $y(t)$ auf und bestimme, um welchen Dämpfungsfall es sich handelt.
(ii) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Masse um 1 nach rechts ausgelenkt und werde losgelassen. Man bestimme $y(t)$ und skizziere den Graphen.
(iii) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Masse um 1 nach rechts ausgelenkt und es werde ihr ein Stoss in Richtung der Ruhelage versetzt, so dass sie sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit 5 in Richtung der Ruhelage bewegt. Man bestimme $y(t)$ und skizziere den Graphen. Man bestimme den Zeitpunkt $t^* > 0$ des Durchgangs durch die Ruhelage, i.e. $y(t^*) = 0$.
(iv) Anfangsbedingungen wie in (iii). Man bestimme den Zeitpunkt $\tilde{t} > 0$, in welchem die Masse keine Geschwindigkeit besitzt, i.e. $y'(\tilde{t}) = 0$.
(v) Der Masse werde zum Zeitpunkt $t = 0$ der gleiche Stoss versetzt wie in (iii), i.e. die Anfangsgeschwindigkeit ist $y'(0) = -5$. Wie gross darf die Auslenkung

$y_0 > 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ höchstens sein, damit die Masse durch die Ruhelage hindurch geht?

(vi) Die Masse besitze zum Zeitpunkt $t = 0$ die gleiche Auslenkung wie in (ii). Wie gross muss $v_0 > 0$ bei der Anfangsgeschwindigkeit $y'(0) = -v_0$ mindestens sein, damit die Masse durch die Ruhelage hindurch geht?

Aufgabe 45. Wir betrachten einen elektrischen Schaltkreis bestehend aus einer Spule mit $L = 1$, einem Widerstand $R = 100$, einem Kondensator mit $C = 10^{-4}$ und einer Gleichspannungsquelle mit $U = 1000$. Alle Angaben in SI-Einheiten.



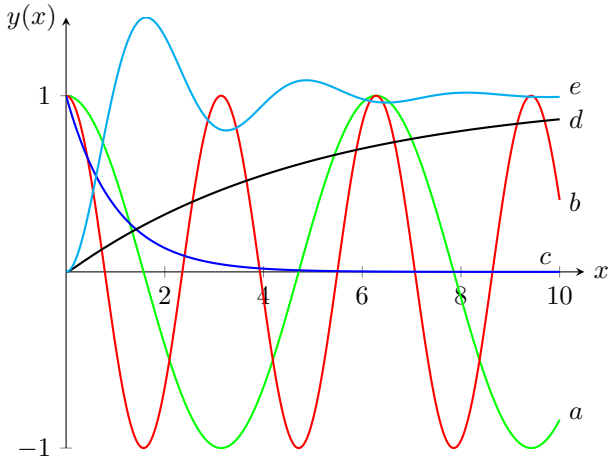
Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich keine Ladung auf dem Kondensator, es fliesst kein Strom und der Schalter wird geschlossen.

(i) Man stelle die Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ auf und bestimme den Dämpfungsfall.

(ii) Man bestimme $I(t)$.

(iii) Man bestimme die Ladung, welche sich nach langer Zeit auf dem Kondensator befindet, i.e. man bestimme $\lim_{t\to\infty} Q(t)$, wobei $Q(t)$ die Ladung auf dem Kondensator ist.

Aufgabe 46. Man ordne die Graphen a bis e einem der Anfangswertprobleme 1. bis 6. zu. Eines der Anfangswertprobleme wurde nicht dargestellt. Man begründe die Zuordnungen.



1. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
2. $y'' + y' + 4y = 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
3. $y' + y = 0$, $y(0) = 1$
4. $y'' + 20y' + 4y = 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
5. $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
6. $y''+y'+4y = 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Aufgabe 47. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungen:

(i) $y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$,
(ii) $y'' + 4y = 8x^2$,
(iii) $y'' - y' - 2y = 10\cos(x)$,
(iv) $y'' - 10y' + 41y = \sin(x)$,
(v) $y'' - 4y = 3e^{2x}$,
(vi) $y'' + 3y' = x$,
(vii) $y'' + 4y = \cos(2x)$.

Mathematik 1, Lisibach André

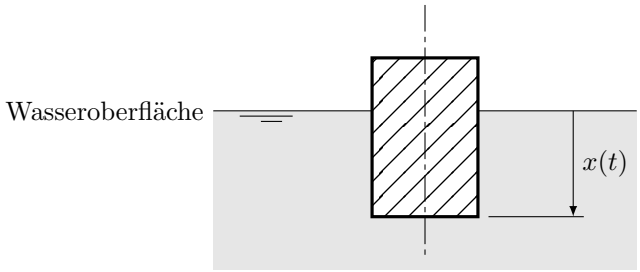
Aufgabe 48. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y'' + 4y = e^{-3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
(ii) $y'' + 4y = 17$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
(iii) $\ddot{y} + y = \cos(2t)$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$.

Aufgabe 49. Man finde eine Lösung der folgenden Gleichungen:

(i) $y'' + 9y = 2e^{3x}$,
(ii) $y'' + 9y = 9x + 9$,
(iii) $y'' + 9y = 6e^{3x} + 18x + 18$.

Aufgabe 50. Wir betrachten eine zylindrische Boje mit Masse m und Grundfläche A. Die Zylinderachse der Boje liege normal zur Wasseroberfläche. Die Einsinktiefe der Boje sei $x(t)$, die Dichte des Wassers sei ρ und die Erdbeschleunigung sei g. Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.



(i) Man finde die Differentialgleichung, welche die vertikale Bewegung $x(t)$ der Boje beschreibt. Dazu betrachte man das Problem eindimensional (vertikale Bewegung) und vernachlässige jegliche Form von Reibung und seitlichen Bewegungen. Man nehme auch an, dass sich die Boje nie ganz aus dem Wasser hinausbewegt und nie ganz unter Wasser verschwindet.
(ii) Man finde die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
(iii) Die Boje werde zum Zeitpunkt $t = 0$ um $x(0) = x_0$ ins Wasser eingetaucht und losgelassen. Man finde die dazugehörige partikuläre Lösung.

Aufgabe 51. Die erzwungene Schwingung des Feder-Masse-Dämpfungssystems

$$y'' + 2\Delta y' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t), \qquad 0 < \Delta < \omega_0,$$

besitzt die Amplitude (siehe Vorlesung)

$$\tilde{C}(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Delta\omega)^2}}.$$

Für $\omega_0^2 > 2\Delta^2$ ist diese maximal bei der Resonanzfrequenz $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Delta^2}$.

(i) Man bestimme die maximale Amplitude $\tilde{C}(\omega^*)$.
(ii) Man bestimme die *Resonanzüberhöhung* $\frac{\tilde{C}(\omega^*)}{\tilde{C}(0)}$, i.e. das Verhältnis der maximalen Amplitude zur Amplitude bei sehr langsamer Anregung. Man zeige, dass für kleine Dämpfung ($\Delta \ll \omega_0$) näherungsweise gilt

$$\frac{\tilde{C}(\omega^*)}{\tilde{C}(0)} \approx \frac{\omega_0}{2\Delta}.$$

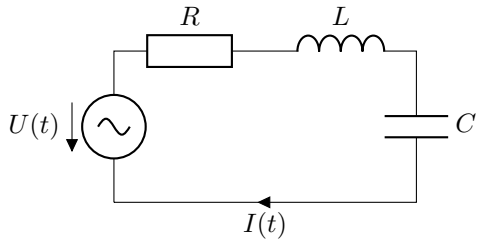
(iii) Man schätze die Resonanzüberhöhung für $\Delta = \frac{\omega_0}{10}$ ab.
(iv) Man zeige, dass für $\Delta = 0$ und $\omega = \omega_0$ die Funktion

$$y_i(t) = \frac{F_0}{2\omega_0}\, t \sin(\omega_0 t)$$

eine Lösung der Gleichung ist. Was bedeutet dies für das System?

Mathematik 1, Lisibach André

Aufgabe 52. Wir betrachten den folgenden elektrischen R-L-C-Kreis:



Die Spannungsquelle liefert die Spannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$.

(i) Man finde die Differentialgleichung für $I(t)$, welche dieses System beschreibt.
(ii) Man finde eine Lösung der inhomogenen Gleichung.
(iii) Man schreibe die Lösung aus (ii) in der Form

$$I_i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

und zeige, dass in diesem Ausdruck I_0 folgendermassen von ω abhängt:

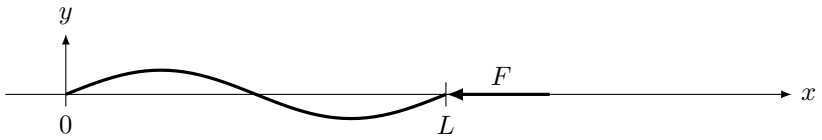
$$I_0(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}} = \frac{U_0\,\omega}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}},$$

wobei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Eigenfrequenz des Systems ist.
(iv) Man finde den Wert von ω, bei welchem $I_0(\omega)$ maximal wird (Resonanzfrequenz), und vergleiche mit dem mechanischen System (siehe Vorlesung).

Aufgabe 53. Die Eulersche Knickgleichung

$$EIy''(x) = -Fy(x) \quad \text{für} \quad 0 < x < L,$$

beschreibt die Auslenkung $y(x)$ eines horizontalen Stabes aus einem Material mit Elastizitätsmodul E und einem Querschnitt mit Flächenträgheitsmoment I, welcher durch eine Kraft der Stärke $F > 0$ horizontal belastet wird:

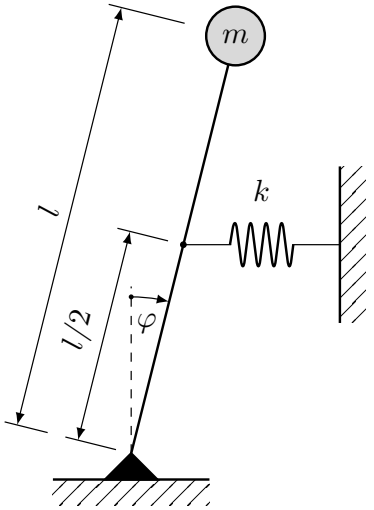


Im Folgenden darf angenommen werden, dass $L = \text{konst.}$, da die horizontale Verformung vernachlässigbar ist.

(i) Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
(ii) Man finde alle Lösungen der Differentialgleichung mit der Randbedingung $y(0) = 0$.
(iii) Man verwende die Randbedingung $y(L) = 0$, um zu zeigen, dass für kleine Kräfte F die Lösung $y(x) \equiv 0$ die einzige Lösung der Differentialgleichung ist.
(iv) Es gibt eine kleinste Kraft F_0, bei welcher der Stab verbogen wird, i.e. es gibt eine von Null verschiedene Lösung. Man berechne F_0.
(v) Wie gross ist die Kraft F in der Situation der obigen Figur?

Mathematik 1, Lisibach André

Aufgabe 54. Man beachte den Hinweis am Ende der Aufgabe. Wir betrachten das folgende mechanische System:



(i) Für die erste Teilaufgabe wird die Feder weggelassen. Man finde die Differentialgleichung für den Winkel $\varphi(t)$. Man bestimme die allgemeine Lösung sowie die partikuläre Lösung, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse durch die Ruhelage $\varphi = 0$ mit einer Horizontalgeschwindigkeit von v_0 geht. Die Situation soll für kleine φ betrachtet werden.

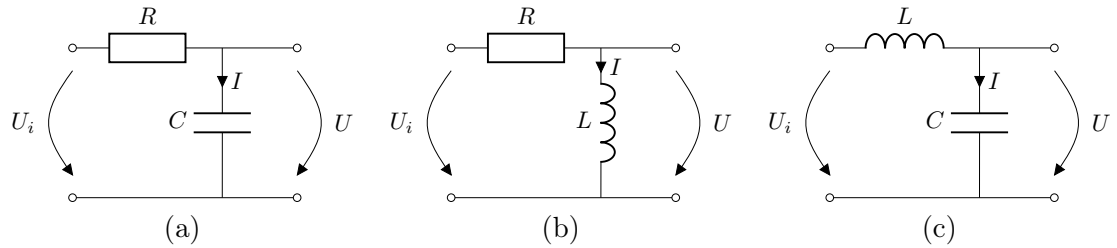
(ii) Für die zweite Teilaufgabe soll die Feder mitberücksichtigt werden. Für $\varphi = 0$ sei die Feder ungespannt. Man finde die Bedingung an die Federkonstante k, so dass periodische Lösungen möglich sind. Man bestimme die dazugehörige Kreisfrequenz der Schwingung.

Hinweis: Die zu $F = ma$ analoge Gleichung für Rotationsbewegungen ist $M = I\ddot{\varphi}$, wobei M das resultierende Drehmoment und $I = ml^2$ das Massenträgheitsmoment des Pendels um die Rotationsachse ist.

Aufgabe 55. Man bestimme jeweils den Typ der Gleichung und löse das Anfangs- bzw. Randwertproblem:

(i) $y' = (x^2 - 4)(3y + 2)$, $y(0) = 1$.
(ii) $y' - y = 1$, $y(0) = 1$.
(iii) $y' + 4y = e^{-4t}$, $y(0) = 2$.
(iv) $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$ (für $t > 0$).
(v) $y'' + 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
(vi) $y'' - 8y' + 17y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = -1$.
(vii) $y'' + 8y' + 17y = 2e^{-3t}$, $y(0) = 2$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Aufgabe 56. Wir betrachten die folgenden drei Schaltungen mit Eingangsspannung U_i und Ausgangsspannung U. Der Ausgang ist offen, i.e. über die Ausgangsklemmen fliesst kein Strom.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird am Eingang die konstante Spannung $U_i = U_0$ angelegt.

(i) Man stelle für jede der drei Schaltungen die Differentialgleichung für $U(t)$, $t > 0$, auf.

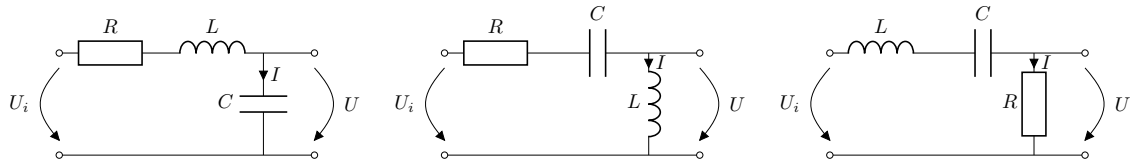
Mathematik 1, Lisibach André

(ii) Man bestimme $U(t)$ für $t \geq 0$ zu den folgenden Anfangsbedingungen und skizziere die drei Lösungen:

(a) $U(0) = 0$, (b) $U(0) = U_0$, (c) $U(0) = 0$, $U'(0) = 0$.

(iii) Man bestimme jeweils das Verhalten der Ausgangsspannung $U(t)$ und des Stromes $I(t)$ für $t \to \infty$. Was folgt daraus für das Verhalten von Kondensator und Spule nach langer Zeit?

Aufgabe 57. Wir betrachten die folgenden drei Schaltungen mit Eingangsspannung U_i und Ausgangsspannung U. Alle Grössen sind in SI-Einheiten zu verstehen.



(a) (b) (c)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird am Eingang die konstante Spannung $U_i = U_0$ angelegt.

(i) Man stelle für jede der drei Schaltungen die Differentialgleichung für $U(t)$, $t > 0$, auf.

(ii) Es sei $R = 120$, $L = 0.1$ und $C = 10^{-5}$. Man bestimme $U(t)$ für $t \geq 0$ zu den folgenden Anfangsbedingungen:

(a) $U(0) = 0$, $U'(0) = 0$,

(b) $U(0) = U_0$, $U'(0) = -1200\, U_0$,

(c) $U(0) = 0$, $U'(0) = 1200\, U_0$.

(iii) Man bestimme jeweils das Verhalten von $U(t)$ für $t \to \infty$.

(iv) Für welche Werte des Widerstandes R (bei gleichem L und C) schwingt die Ausgangsspannung nicht?

Aufgabe 58. Zwei Männer fahren mit einem kleinen Motorboot. Die Masse der Passagiere und des Bootes ist m und der Motor erzeugt eine konstante Kraft F. Die Widerstandskraft des Wassers ist proportional zur Geschwindigkeit v des Bootes, mit einer Proportionalitätskonstanten k.

(i) Man stelle die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $v(t)$ auf.

(ii) Man bestimme die allgemeine Lösung.

(iii) Sei $m = 500$, $F = 200$ und $k = 10$ (in SI-Einheiten). Man skizziere das Richtungsfeld für die Differentialgleichung im Bereich $(t, v) \in [0, 200] \times [0, 30]$.

(iv) Nach langer Zeit wird sich das Boot mit einer Endgeschwindigkeit v_∞ bewegen. Man bestimme v_∞, durch physikalische Überlegung, grafisch aus dem Richtungsfeld und durch Berechnung aus der allgemeinen Lösung.

(v) Wir betrachten den Start des Bootes. Man finde die Zeit t^*, bei welcher das Boot die Geschwindigkeit $0.9\, v_\infty$ erreicht hat.

(vi) Man löse die Teilaufgaben (i) und (ii) im Fall, dass die Widerstandskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v des Bootes ist, mit einer Proportionalitätskonstanten k.

Aufgabe 59. Wir betrachten einen vollen Flüssigkeitsbehälter, welcher über seine gesamte Höhe den gleichen Querschnitt A_0 aufweist. Am unteren Ende der Mantelfläche des Behälters wird ein Loch mit Querschnitt A geöffnet. Die Austrittsgeschwindigkeit (nach Torricelli) ist gegeben durch $w = \sqrt{2gh}$, wobei wir mit h die Niveauhöhe der Flüssigkeit im Behälter und mit g die Erdbeschleunigung bezeichnen.

(i) Man finde eine Differentialgleichung für $h(t)$.

Mathematik 1, Lisibach André

(ii) Man finde die Lösung dieser Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $h(0) = H$.

(iii) Man finde die Zeit, die benötigt wird, um den Behälter zu leeren.

(iv) Der Behälter wird auf einen Schubkarren gestellt und von einem Esel mit konstanter horizontaler Kraft F_0 gezogen. Das Loch befinde sich seitlich, quer zur Fahrtrichtung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Schubkarren in Ruhe und das Niveau im Behälter sei gleich H. Das Newtonsche Gesetz der Dynamik für den Fall veränderlicher Masse $m(t)$ ist (dies ist nicht zu zeigen):

$$F = m(t)\frac{dv}{dt}(t).$$

Man vernachlässige die Masse des Schubkarrens und des Behälters und bestimme die Geschwindigkeit $v(t)$ des Schubkarrens.

Aufgabe 60. Man schreibe die folgenden Differentialgleichungen als System von Differentialgleichungen erster Ordnung und gebe die Matrix A der dazugehörigen Matrixschreibweise $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ sowie den Vektor $\overrightarrow{y}(3)$, resp. $\overrightarrow{y}(0)$ an.

(i)

$$2y'' - 5y' + y = 0, \qquad y(3) = 6, \quad y'(3) = -1.$$

(ii)

$$y^{(4)} + 3y'' - 17y' = -8y, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3, \quad y'''(0) = 4.$$

Aufgabe 61. Man löse das Anfangswertproblem

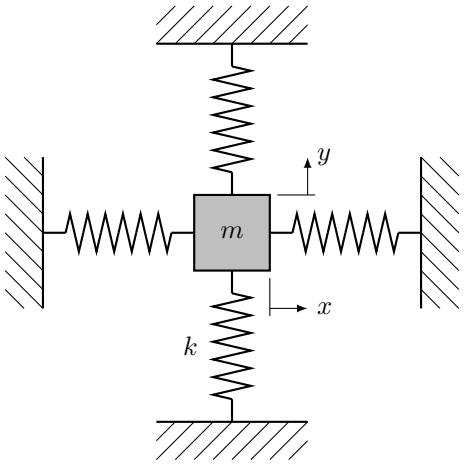
$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \quad \overrightarrow{y}(x_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

für die folgenden Matrizen A:

(i) $A = \alpha\mathbb{1}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

Aufgabe 62. Eine Masse m liege (reibungsfrei) auf einem Tisch und sei durch vier identische Federn wie in der folgenden Draufsicht eingespannt:



(i) Man finde Differentialgleichungen für die Auslenkung

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Mathematik 1, Lisibach André

aus der Ruhelage. Man betrachte dabei nur kleine Auslenkungen, so dass die Winkeländerungen der Federn vernachlässigt werden können.

(ii) Man finde die allgemeine Lösung $\overrightarrow{r}(t)$.

(iii) Man finde die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$\overrightarrow{r}(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{r}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

(iv) Man zeige, dass die Lösung $\overrightarrow{r}(t)$ aus (iii) eine Ellipse beschreibt, i.e. man finde die Konstanten A, B in der Ellipsengleichung

$$\frac{x(t)^2}{A^2} + \frac{y(t)^2}{B^2} = 1.$$

Aufgabe 63. Für die folgenden Gleichungssysteme finde man die Lösung zu den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 2$ und klassifiziere den Ursprung $(y_1, y_2) = (0, 0)$ (dies ist der Fixpunkt) als Attraktor, Repeller oder Sattelpunkt.

(i)
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

(iii)
$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 - y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

(iv)
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

Aufgabe 64. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man finde die allgemeine Lösung von $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ und bestimme die möglichen Werte von α und β, so dass sich die Lösung des Anfangswertproblems

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \qquad \overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

für $x \to \infty$ dem Ursprung annähert.

Aufgabe 65. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

(i) Man schreibe die Gleichung in der Form $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$.

(ii) Man finde die allgemeine Lösung $\overrightarrow{y}(x)$.

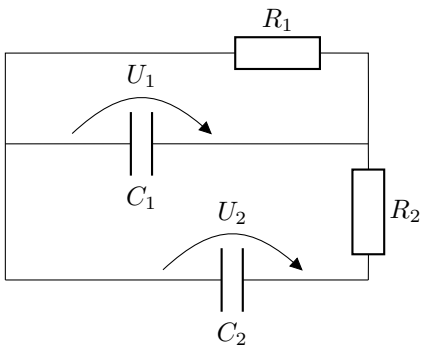
(iii) Die Anfangsbedingungen seien

$$y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = \beta,$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Man finde die möglichen Werte von α und β, so dass sich die Lösung im Phasenraum auf einer Geraden durch den Ursprung befindet.

Mathematik 1, Lisibach André

Aufgabe 66. Wir betrachten den folgenden Schaltkreis:



(i) Man zeige, dass die Spannungen über den Kondensatoren $U_1(t)$, $U_2(t)$ durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben werden:

$$\begin{cases} U_1' = -\dfrac{1}{R_1 C_1} U_1 + \dfrac{1}{R_2 C_1}(U_2 - U_1), \\ U_2' = \dfrac{1}{R_2 C_2}(U_1 - U_2). \end{cases}$$

(ii) Man schreibe das obige System von Differentialgleichungen um auf die Form

$$\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U},$$

wobei $\overrightarrow{U}(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix}$, i.e. man finde die Matrix A.

(iii) Seien (in SI-Einheiten)

$$R_1 = \frac{1}{2}, \qquad R_2 = 1, \qquad C_1 = 1, \qquad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Man finde die allgemeine Lösung $\overrightarrow{U}(t)$.

(iv) Man finde die Gleichung der Tangente an die Lösungskurve im Phasenraum im Punkt

$$(U_1, U_2) = (5, 4).$$

(v) Man finde Bedingungen an die Spannungen zum Zeitpunkt $t = 0$, so dass sich die Lösung im Phasenraum auf einer Geraden befindet.

Aufgabe 67. Für die folgenden Systeme finde man reelle Basislösungen und die Lösung zur Anfangsbedingung $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$. Man klassifiziere den Fixpunkt im Ursprung und skizziere die Kurve der Lösung im Phasenraum.

(i)
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Aufgabe 68. Wir betrachten die Differentialgleichung und die zugehörigen Anfangsbedingungen

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

(i) Man schreibe die Gleichung in der Form

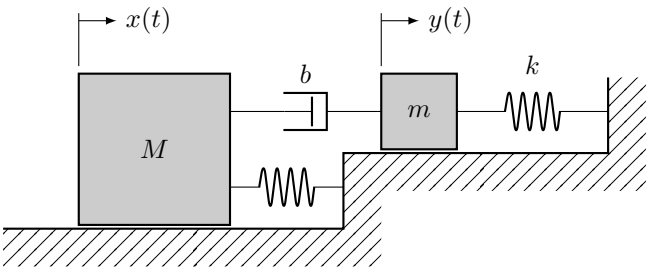
$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}.$$

(ii) Man bestimme die Richtung der Tangente an die Lösungskurve im Phasenraum an der Stelle $x = 0$.

(iii) Man skizziere (qualitativ) die Lösungskurve im Phasenraum und mache eine Aussage zur Stabilität des Fixpunktes im Ursprung.

Mathematik 1, Lisibach André

Aufgabe 69. Wir betrachten das folgende mechanische System:



Die beiden Massen M und m liegen reibungsfrei auf der Unterlage und sind durch einen Dämpfer mit Dämpfungskonstante b verbunden. Die beiden Federn haben dieselbe Federkonstante k. $x(t)$, $y(t)$ sind die Auslenkungen aus den Ruhelagen.

(i) Man finde die Bewegungsgleichungen für $x(t)$, $y(t)$.

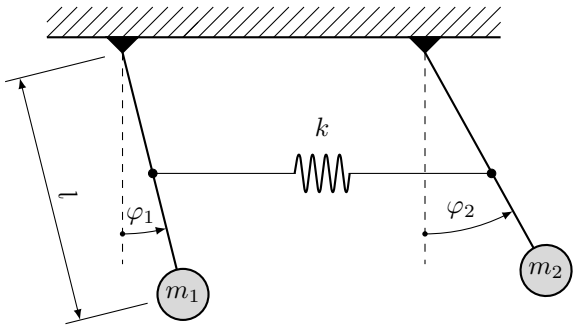
(ii) Man schreibe die Gleichungen aus (i) in Form eines Gleichungssystems erster Ordnung. Dazu führe man die Funktionen

$$z_1 = x, \qquad z_2 = x', \qquad z_3 = y, \qquad z_4 = y'$$

ein und finde die Matrix A in $\overrightarrow{z}' = A\overrightarrow{z}$, wobei

$$\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 70. Zwei Pendel der Länge l mit den Massen m_1 und m_2 (Punktmassen an masselosen Stäben) sind durch eine Feder mit Federkonstanten k gekoppelt:



(i) Man finde die Bewegungsgleichungen für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$. Man betrachte dazu nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage.

Hinweise:

(a) Die Feder ist an beiden Pendeln jeweils in der Mitte des Stabes befestigt, und die Länge der ungespannten Feder entspricht dem horizontalen Abstand der beiden Aufhängungspunkte.

(b) Man verwende wie im Skript (Drehbewegung und Pendel) die Gleichung $M = I\ddot{\varphi}$, wobei M das resultierende Drehmoment und $I = ml^2$ das Massenträgheitsmoment des Pendels um die Drehachse ist.

(ii) Man schreibe die Gleichungen aus (i) in Form eines Gleichungssystems erster Ordnung und formuliere dieses Gleichungssystem in Matrixform.

Aufgabe 71. Wir betrachten das inhomogene System

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{r}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Man bestimme den Fixpunkt $\overrightarrow{c}$ des Systems.

Mathematik 1, Lisibach André

(ii) Man finde die allgemeine Lösung.

(iii) Man finde die Lösung zur Anfangsbedingung $\overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und beschreibe ihr Verhalten für $x \to \infty$.

(iv) Man berechne von Hand einen Schritt der Methode von Euler mit der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$, ausgehend von der Anfangsbedingung aus (iii).

Aufgabe 72. Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 4.$$

(i) Man schreibe die Gleichung als System $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{r}$.

(ii) Man bestimme den Fixpunkt des Systems und klassifiziere ihn.

(iii) Die Gleichung beschreibt ein Feder-Masse-System mit $m = 1$, $\delta = 3$, $k = 2$, auf welches eine konstante äussere Kraft $F = 4$ wirkt. Man interpretiere den Fixpunkt physikalisch.

Aufgabe 73. Wir betrachten das Feder-Masse-System ohne Dämpfung $y'' + y = 0$. Als System geschrieben lautet es

$$\overrightarrow{y}' = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}.$$

(i) Man zeige, dass für jede Lösung $\overrightarrow{y}(x)$ der Abstand $|\overrightarrow{y}(x)|$ zum Ursprung konstant ist, i.e. die Kurven im Phasenraum sind Kreise um den Ursprung.
Hinweis: Man leite $|\overrightarrow{y}(x)|^2 = y_1(x)^2 + y_2(x)^2$ nach x ab.

(ii) Man zeige, dass für einen Schritt der Methode von Euler mit Schrittweite h gilt

$$|\overrightarrow{y}_{k+1}|^2 = (1 + h^2)|\overrightarrow{y}_k|^2.$$

Hinweis: Man schreibe $\overrightarrow{y}_k = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

(iii) Was bedeutet das Ergebnis von (ii) für die Kurve der numerischen Lösung im Phasenraum? Man vergleiche mit (i).

(iv) Man berechne $|\overrightarrow{y}_4|^2$ für den Anfangswert $\overrightarrow{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

Mathematik 1, Lisibach André

Lösung 1. (i) 1, (ii) 1, (iii) 2, (iv) 1, (v) 3, (vi) 2

Lösung 2.

(i) $y' = G(x,y) = \frac{x}{y}$
(ii) $y' = G(x,y) = \frac{x+y}{x^2}$
(iii) $y' = G(x,y) = x - y$
(iv) $y' = G(x,y) = 1 - \frac{y}{x}$
(v) $y'' = G(x,y,y') = y'$
(vi) $y' = G(x,y) = -y^2 + \frac{y}{x}$
(vii) $y' = G(x,y) = -\frac{y(1+17x)}{x(1+y)}$

Lösung 3. Beide durch Einsetzen.

(i) Die Lösung ist für $x < 1$ definiert.
(ii) Die Lösung ist für $-1 < x < 1$ definiert.

Lösung 4. $y(x) = \log(x) + C$

Lösung 5. Alle gegebenen Funktionen sind Lösungen der Gleichung.

Lösung 6. Die zu untersuchende Lösung ist $y(x) = xe^{-x}$. Wir haben somit $y'(x) = (1-x)e^{-x}$, $y''(x) = (x-2)e^{-x}$. Eingesetzt in die linke Seite der Gleichung $y''+2y'+y = 0$ ergibt

$$y'' + 2y' + y = (x-2)e^{-x} + 2(1-x)e^{-x} + xe^{-x} = 0,$$

was der rechten Seite entspricht. Somit ist die Gleichung erfüllt, i.e. $y(x) = xe^{-x}$ ist eine Lösung dieser Gleichung.

Lösung 7.

(i) Die Differentialgleichung ist zweiter Ordnung.
(ii) Wir haben $y'(x) = \log(x) + 1$, $y''(x) = \frac{1}{x}$. Eingesetzt in der linken Seite der Gleichung ergibt

$$x^3(\log(x)+1)\left(\frac{1}{x}\right)^2 = x(\log(x)+1) = x\log(x) + x.$$

Dies entspricht der rechten Seite der Differentialgleichung, somit ist $y(x)$ eine Lösung.

Lösung 8. Eingesetzt in der linken Seite der Gleichung ergibt

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = -17y_1^2 - 17y_2^2,$$

wobei wir für die zweite Gleichheit verwendet haben dass y_1, y_2 Lösungen der Differentialgleichung sind. Eingesetzt in der rechten Seite der Gleichung ergibt

$$-17(y_1 + y_2)^2 = -17(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2).$$

Dies stimmt im Allgemeinen nicht mit der linken Seite überein, da im Allgemeinen der Mischterm $2y_1y_2$ nicht verschwindet.

Lösung 9.

(i) Man überprüft durch Einsetzen dass die gegebenen Funktionen Lösungen sind.
(ii) Jede Funktion der Form

$$y(x) = C_1x^{-3/2} + C_2x^{-1/2}$$

mit C_1, C_2 zwei Konstanten ist eine Lösung.
(iii) Die Lösung lautet

$$y(x) = x^{-3/2}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Lösung 10.

(i) Nein. Die Funktionen erfüllen die Gleichung nur für $C = 0$.

(ii) Nein. Die Gleichung ist zweiter Ordnung, die allgemeine Lösung hängt somit von zwei Konstanten ab. Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = C_1 x + C_2$.

(iii) Ja. Die Funktionen sind Lösungen und die Menge hängt von einer Konstanten ab, wie es für eine Gleichung erster Ordnung zu erwarten ist.

Lösung 11. (i) Anfangswertproblem, (ii) Randwertproblem, (iii) Anfangswertproblem, (iv) Randwertproblem, (v) Anfangswertproblem.

Lösung 12.

(i) Zweifache unbestimmte Integration ergibt

$$y(x) = \frac{K}{6}x^3 + C_1 x + C_2.$$

(ii) Aus der Auflage bei $x = 0$ folgt $y(0) = 0$. Aus Symmetriegründen ist die Auslenkung in der Balkenmitte maximal, i.e. $y'(L/2) = 0$. Die erste Bedingung ergibt $C_2 = 0$, die zweite

$$y'(L/2) = \frac{K}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 = \frac{KL^2}{8} + C_1 \stackrel{!}{=} 0$$

und somit $C_1 = -\frac{KL^2}{8}$. Die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{K}{6}x^3 - \frac{KL^2}{8}x \\ &= \frac{F}{12EI}x^3 - \frac{FL^2}{16EI}x. \end{aligned}$$

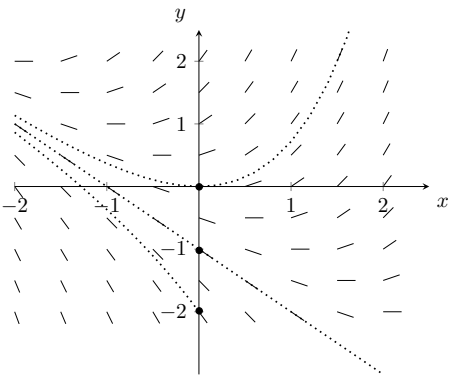
(iii) Einsetzen von $x = L/2$ ergibt

$$y(L/2) = \frac{KL^3}{48} - \frac{KL^3}{16} = -\frac{KL^3}{24} = -\frac{FL^3}{48EI}.$$

Das negative Vorzeichen entspricht einer Auslenkung nach unten.

Lösung 13.

(i) Wir setzen $m = x + y = \text{konst.}$ und finden dass die Kurven konstanter Steigung (dies sind die Isoklinen) Geraden mit Steigung -1 entsprechen. Beispielsweise besitzt das Richtungsfeld die Steigung $m = 0$ auf der Geraden $y = -x$ und Steigung $m = -1$ auf der Geraden $y = -x - 1$.



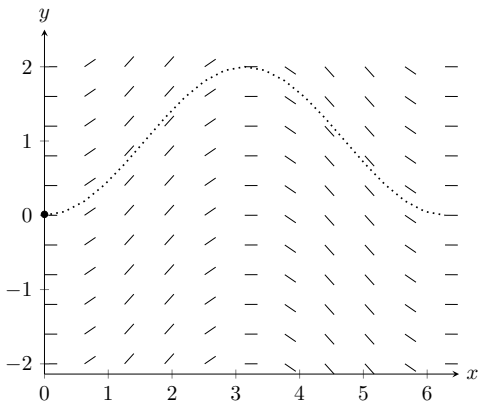
(ii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet, die Anfangsbedingungen sind durch die fetten Punkte gegeben.

(iii) Für $y(0) > -1$ haben wir $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ und für $y(0) \leq -1$ haben wir $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

Lösung 14.

Mathematik 1, Lisibach André

(i)



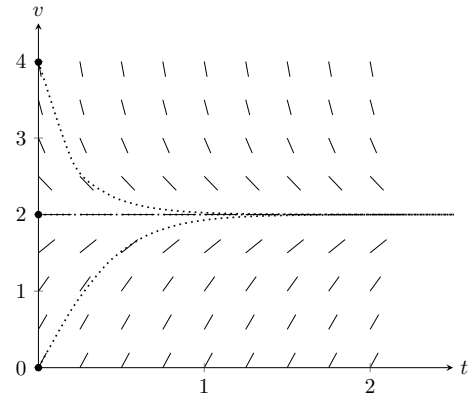
(ii) Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = -\cos(x) + C$.

(iii) Die partikuläre Lösung lautet $y(x) = -\cos(x) + 1$. Sie ist im Richtungsfeld gepunktet eingezeichnet.

Lösung 15.

(i) Das Newtonsche Gesetz ist $F = ma$, wobei $a = dv/dt$. Die Strömungswiderstandskraft ist $F_W = -10v^2$ und die resultierende Kraft ist somit $F = mg + F_W = mg - 10v^2$. Mit $m = 10$ ergibt sich die gesuchte Gleichung.

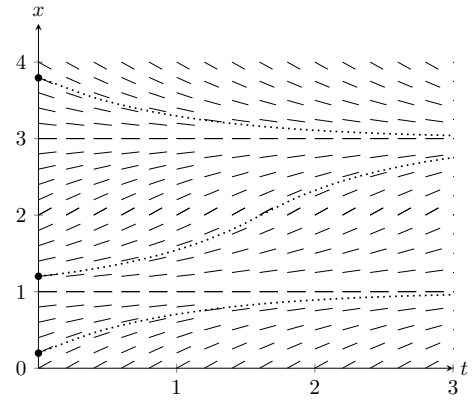
(ii)



(iii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet. Die Anfangsbedingungen sind durch die Punkte gegeben. Unabhängig von der Anfangsbedingung ergibt sich für grosse Zeiten ($\lim_{t\to\infty}$) die Geschwindigkeit $v = 2$.

Lösung 16.

(i)



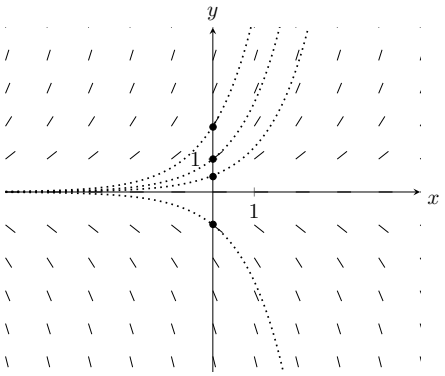
(ii) Gepunktet eingezeichnet.

(iii) Für $x_0 = 0.2$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$, für $x_0 = 1.2, 3.8$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 3$.

Mathematik 1, Lisibach André

Lösung 17.

(i)



(ii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet.

(iii) Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = Ce^x$.

Lösung 18.

(i) Mit $x_0 = 0$, $y_0 = 1$:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 1 \cdot (0 + 1) = 2,$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2 + 1 \cdot (1 + 2) = 5.$$

(ii) Erster Schritt:

$$y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2,$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\Big(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)\Big) = 1 + \frac{1}{2}(1 + 3) = 3.$$

Zweiter Schritt:

$$y_2^* = y_1 + hf(x_1, y_1) = 3 + 4 = 7,$$
$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\Big(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^*)\Big) = 3 + \frac{1}{2}(4 + 9) = 9.5.$$

Lösung 19.

$$y(x) = \frac{-4}{2x^2 + x^4 + C}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Durch die Division durch y^2 geht die Lösung $y \equiv 0$ verloren, i.e. streng genommen ist $y \equiv 0$ auch Teil der allgemeinen Lösung.

Lösung 20. Diese Gleichung lässt sich nicht mit der Methode der Separation der Variablen lösen (die Variablen lassen sich nicht separieren).

Lösung 21.

(i) $y(x) = \frac{x}{Cx+1}$

(ii) $y(x) = C\sqrt{1 + x^2}$

(iii) $y(x) = \arccos\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$

(iv) $y(x) = \frac{(x+C)^2}{4}$ für $x \geq -C$.

Hinweis: Auch in dieser Aufgabe gehen durch das Umstellen der Gleichungen Lösungen verloren. Streng genommen ist $y \equiv 0$ jeweils auch Teil der allgemeinen Lösung in (i), (iv).

Lösung 22.

(i) Gleichung und Lösung:

$$G' = -\lambda G, \qquad G(t) = G_0 e^{-\lambda t}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

(ii) Die beschreibende Gleichung ist

$$G' = -\lambda G + r.$$

Diese ist separierbar. Die allgemeine Lösung lautet

$$G(t) = Ce^{-\lambda t} + \frac{r}{\lambda}.$$

Aus der Anfangsbedingung $G(0) = G_0$ folgt

$$G(t) = \left(G_0 - \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + \frac{r}{\lambda}.$$

Lösung 23.

(i) Allgemeine Lösung: $y(x) = Ce^{3x^2/2-2x}$. Partikuläre Lösung: $y(x) = e^{3x^2/2-2x}$.

(ii) Allgemeine Lösung: $y(x) = \frac{2}{3}\frac{(1+Ce^{12x})}{(1-Ce^{12x})}$. Partikuläre Lösung: $y(x) = \frac{2}{3}$.

Lösung 24. Für die Oberfläche und das Volumen einer Kugel gelten

$$O = 4\pi r^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Aus der Beschreibung des Vorgangs haben wir

$$\frac{dV}{dt} = kO,$$

wobei k eine Konstante ist. Wegen

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

gilt

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = k4\pi r^2.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\frac{dr}{dt} = k.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung. Ihre Lösung lautet

$$r(t) = kt + r(0).$$

Lösung 25. Separation und Integration liefert

$$\log(p) = -\frac{c_p}{c_V}\log(V) + C.$$

Somit folgt

$$p(V) = CV^{-c_p/c_V}$$

und daraus

$$pV^{c_p/c_V} = C.$$

Wir haben $\kappa = c_p/c_V$.

Lösung 26. Separation und Integration liefern

$$\int (2y+1)dy = \int dx \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 + y = x + C.$$

Aus $y(0) = 1$ folgt $C = 2$. Auflösen der quadratischen Gleichung $y^2 + y - (x+2) = 0$ nach y ergibt

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{4x+9}}{2}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Wegen $y(0) = 1$ kommt nur das positive Vorzeichen in Frage und wir erhalten

$$y(x) = \frac{-1 + \sqrt{4x+9}}{2}.$$

Die Lösung ist für $x \geq -\frac{9}{4}$ definiert.

Lösung 27.

(i) Die Gleichung ist linear, denn sie lässt sich in der Form $y' - \frac{1}{x}y = 1$ schreiben, i.e. $p(x) = -\frac{1}{x}$ und $q(x) = 1$. Sie ist nicht separierbar, die rechte Seite $\frac{y}{x} + 1$ lässt sich nicht als Produkt $g(x)h(y)$ schreiben.

(ii) $P(x) = -\log(x)$, $\mu(x) = e^{-\log(x)} = \frac{1}{x}$. Damit wird die Gleichung zu $\frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$, i.e. $y\frac{1}{x} = \log(x) + C$ und somit $y(x) = x\log(x) + Cx$.

(iii) Aus $y(1) = 2$ folgt $C = 2$, i.e. $y(x) = x\log(x) + 2x$.

Lösung 28.

(i) $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

(ii) $y(x) = x^3 + Cx^2$

(iii) $y(x) = (x + C)e^{3x}$

(iv) $y(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{C}{te^t}$

(v) $y(x) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-x^2}\right)$

(vi) $y(x) = \frac{\pi - 1 - \cos(x)}{x}$

Lösung 29.

(i) $y_h(x) = Ce^x$, $y_i(x) = e^{2x}$. Somit $y(x) = Ce^x + e^{2x}$.

(ii) $y_h(x) = Ce^{x - \frac{x^2}{2}}$, $y_i(x) = 0$ (die Gleichung ist homogen).

(iii) $y_h(x) = Ce^{-x}$, $y_i(x) = x - 1$. Somit $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$.

(iv) $y_h(x) = Ce^x$, $y_i(x) = xe^x$. Somit $y(x) = Ce^x + xe^x$. Aus $y(1) = 0$ folgt $C = -1$, i.e. $y(x) = (x-1)e^x$.

(v) $y_h(x) = \frac{C}{x}$, $y_i(x) = \frac{(1-x)e^x}{x}$. Somit $y(x) = \frac{C + (1-x)e^x}{x}$. Aus $y(1) = 0$ folgt $C = 0$, i.e. $y(x) = \frac{(1-x)e^x}{x}$.

(vi) $y_h(x) = Cxe^x$, $y_i(x) = x^2$. Somit $y(x) = Cxe^x + x^2$. Aus $y(1) = 0$ folgt $C = -e^{-1}$, i.e. $y(x) = x^2 - xe^{x-1}$.

Lösung 30. Division durch L ergibt $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}$, i.e. $p(t) = \frac{R}{L}$ und somit $\mu(t) = e^{\frac{R}{L}t}$.

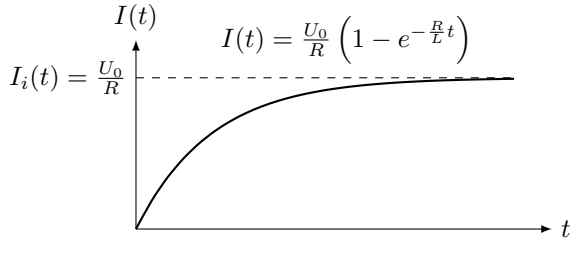
(i) $\frac{d}{dt}\left(Ie^{\frac{R}{L}t}\right) = \frac{U_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}$, i.e. $Ie^{\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C$ und somit $I(t) = \frac{U_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$. Aus $I(0) = 0$ folgt $C = -\frac{U_0}{R}$, i.e.

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

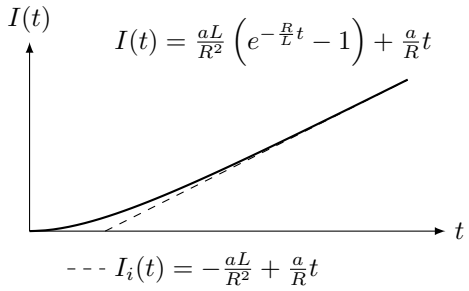
(ii) $\frac{d}{dt}\left(Ie^{\frac{R}{L}t}\right) = \frac{a}{L}te^{\frac{R}{L}t}$. Partielle Integration der rechten Seite liefert $\left(\frac{a}{R}t - \frac{aL}{R^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}$ und somit $I(t) = \frac{a}{R}t - \frac{aL}{R^2} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$. Aus $I(0) = 0$ folgt $C = \frac{aL}{R^2}$, i.e.

$$I(t) = \frac{a}{R}t + \frac{aL}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1\right).$$

(iii)



Mathematik 1, Lisibach André



Für grosse Zeiten verschwindet in beiden Fällen der Anteil $I_h(t)$ der homogenen Gleichung. Massgebend ist somit $I_i(t)$: Bei (i) strebt der Strom gegen den konstanten Wert $\frac{U_0}{R}$, bei (ii) gegen die Gerade $\frac{a}{R}t - \frac{aL}{R^2}$.

Lösung 31. Für $t \geq 0$ gilt $u(t) = \hat{u}$. Division durch T ergibt $\dot{v} + \frac{1}{T}v = \frac{K\hat{u}}{T}$, i.e. $\mu(t) = e^{\frac{t}{T}}$. Damit wird die Gleichung zu $\frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{t}{T}}\right) = \frac{K\hat{u}}{T}e^{\frac{t}{T}}$, i.e. $ve^{\frac{t}{T}} = K\hat{u}e^{\frac{t}{T}} + C$ und somit $v(t) = K\hat{u} + Ce^{-\frac{t}{T}}$. Aus $v(0) = 0$ folgt $C = -K\hat{u}$ und das Ausgangssignal lautet

$$v(t) = K\hat{u}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Lösung 32. Die Gleichung ist zwar linear, sie ist aber auch separierbar. Ein integrierender Faktor ist deshalb nicht nötig. Umschreiben ergibt

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(T_1 + RP_v - T\right).$$

Separation und Integration liefert

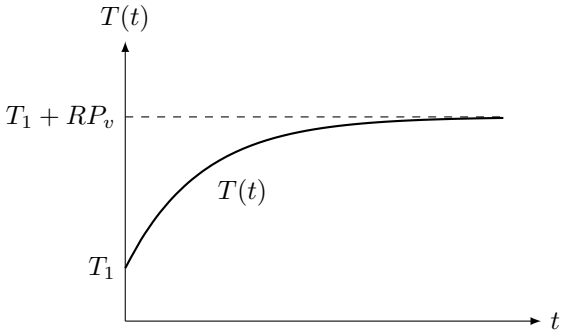
$$\int \frac{dT}{T_1 + RP_v - T} = \int \frac{dt}{\tau}, \qquad \text{i.e.} \qquad -\log\left(T_1 + RP_v - T\right) = \frac{t}{\tau} + C_1.$$

Auflösen nach T ergibt die allgemeine Lösung

$$T(t) = T_1 + RP_v - Ce^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Aus $T(0) = T_1$ folgt $C = RP_v$, i.e.

$$T(t) = T_1 + RP_v\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$



Lösung 33.

(i) (a) Linear. Es gilt $L_1(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)' + x(y_1 + y_2) = y_1' + xy_1 + y_2' + xy_2 = L_1(y_1) + L_1(y_2)$ und $L_1(ay) = ay' + axy = aL_1(y)$.
(b) Nicht linear. $L_2(2y) = 2y' + 4y^2$, aber $2L_2(y) = 2y' + 2y^2$.
(c) Nicht linear. $L_3(2y) = 2y' + \sin(2y)$, aber $2L_3(y) = 2y' + 2\sin(y)$, und im Allgemeinen gilt $\sin(2y) \neq 2\sin(y)$.
(d) Linear, Rechnung wie in (a).

(ii) Nur für $a = 0$. Für $a \neq 0$ ist L_a aus demselben Grund wie in (i)(b) nicht linear.

Mathematik 1, Lisibach André

Lösung 34. Es genügt zusätzlich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung zu bestimmen. Die Gleichung liegt in der Form $y'+p(x)y = q(x)$ vor. Mit $\tilde{y}'(x) = \cos(x)$ gilt $\tilde{y}' + 2x\tilde{y} = \cos(x) + 2x\sin(x)$, i.e. $\tilde{y}$ ist eine Lösung. Die zugehörige homogene Gleichung $y' + 2xy = 0$ hat die allgemeine Lösung $y_h(x) = Ce^{-x^2}$. Somit $y(x) = \sin(x) + Ce^{-x^2}$.

Lösung 35.

(i) $y(x) = \pi e^{-2x}\big(\cos(x) + 2\sin(x)\big)$
(ii) $y(x) = \frac{1}{6}\left(e^{16x} - e^{4x}\right)$
(iii) $x(t) = \left(5 - \frac{7}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t}$
(iv) $y(x) = 2 - e^{-2x}$
(v) $y(x) = e^{3x} + e^{-3x}$

Lösung 36.

(i) Mit $y_2'(x) = (1+\lambda x)e^{\lambda x}$ und $y_2''(x) = (2\lambda + \lambda^2 x)e^{\lambda x}$ folgt

$$L(y_2) = \Big(\underbrace{(\lambda^2 + p\lambda + q)}_{=0}\, x + \underbrace{2\lambda + p}_{=0}\Big)e^{\lambda x} = 0,$$

da λ die charakteristische Gleichung löst und $\lambda = -\frac{p}{2}$ gilt.

(ii) Wegen $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = x$ ist y_2 kein (konstantes) Vielfaches von y_1, und umgekehrt ist y_1 kein Vielfaches von y_2.

Lösung 37.

(i) $y'' + y' - 6y = 0$
(ii) $y'' - 6y' + 9y = 0$
(iii) $y'' + 2y' + 5y = 0$
(iv) $y'' - 4y' = 0$
(v) $y'' + 9y = 0$

Lösung 38.

(i) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$, kritische Dämpfung für $\delta = 2\sqrt{km} = 8$.
(ii) Mit $\Delta = \frac{\delta}{2m} = \frac{\delta}{4}$:
- $\delta = 4$: $\Delta = 1 < \omega_0$, schwache Dämpfung, $\omega_d = \sqrt{3}$,
$$y(t) = e^{-t}\big(C_1\cos(\sqrt{3}t) + C_2\sin(\sqrt{3}t)\big).$$
- $\delta = 8$: $\Delta = 2 = \omega_0$, kritische Dämpfung,
$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}.$$
- $\delta = 12$: $\Delta = 3 > \omega_0$, starke Dämpfung, $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{5}$,
$$y(t) = C_1 e^{(-3+\sqrt{5})t} + C_2 e^{(-3-\sqrt{5})t}.$$

(iii) Kritische Dämpfung: Bei schwacher Dämpfung schwingt das System über die Ruhelage hinaus. Bei starker Dämpfung kehrt es langsamer in die Ruhelage zurück als bei kritischer Dämpfung (siehe Vergleich der Dämpfungsfälle im Skript).

Lösung 39. $y(t) = e^{-3t}\big(3\cos(4t) + 4\sin(4t)\big)$

Lösung 40. Mit

$$y'(t) = \big(C_2 - \Delta(C_1 + C_2 t)\big)e^{-\Delta t}$$

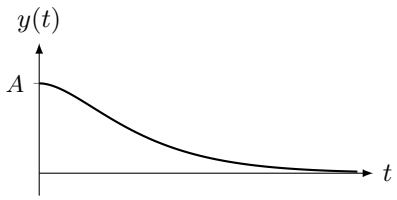
gilt $y(0) = C_1$ und $y'(0) = C_2 - \Delta C_1$.

(i) Aus $C_1 = A$ und $C_2 - \Delta A = 0$ folgt $C_2 = \Delta A$ und

$$y(t) = A(1 + \Delta t)e^{-\Delta t}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Wegen $y'(t) = -A\Delta^2 te^{-\Delta t} < 0$ für $t > 0$ ist $y(t)$ monoton fallend.



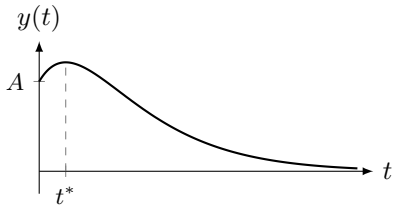
(ii) Aus $C_1 = A$ und $C_2 - \Delta A = B$ folgt $C_2 = B + \Delta A$ und

$$y(t) = \big(A + (B + \Delta A)t\big)e^{-\Delta t}.$$

Aus $y'(t) = 0$, i.e. $C_2 = \Delta(C_1 + C_2 t)$, folgt der Umkehrpunkt

$$t^* = \frac{C_2 - \Delta C_1}{\Delta C_2} = \frac{B}{\Delta(B + \Delta A)} > 0.$$

Ab dem Umkehrpunkt verhält sich die Lösung wie in (i).



(iii) Aus $C_1 = A$ und $C_2 - \Delta A = D$ folgt $C_2 = D + \Delta A$ und

$$y(t) = \big(A + (D + \Delta A)t\big)e^{-\Delta t}.$$

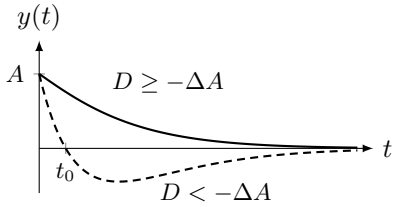
Es gilt $y(t) = 0$ genau dann, wenn $A + (D + \Delta A)t = 0$. Wegen $A > 0$ ist dies für ein $t > 0$ nur möglich, falls $D + \Delta A < 0$, i.e. falls

$$D < -\Delta A.$$

Der Nulldurchgang erfolgt dann zum Zeitpunkt

$$t_0 = -\frac{A}{D + \Delta A}.$$

Ab dem Nulldurchgang verhält sich die Lösung wie in (ii) mit $A = 0$, gespiegelt an der t-Achse.



Lösung 41.

(i) Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{\delta}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\delta}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}}.$$

Wegen $k > 0$ gilt $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ (siehe Diskussion der Lösungen).

(ii) Aus $y(0) = C_1 + C_2 = 0$ folgt $C_2 = -C_1$. Damit ist

$$y'(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = C_1(\lambda_1 - \lambda_2) = v_0,$$

i.e. $C_1 = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$ und $C_2 = -\frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Somit ist

$$y(t) = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right).$$

Mathematik 1, Lisibach André

Wegen $\lambda_1 > \lambda_2$ gilt $y(t) > 0$ für $t > 0$, i.e. die Masse geht nicht durch die Ruhelage.

(iii) Aus

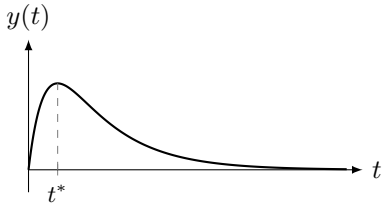
$$y'(t) = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\right) = 0$$

folgt $\lambda_1 e^{\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$, i.e.

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Wegen $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ gilt $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ und $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, somit

$$t^* = \frac{\log\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2} > 0.$$



Lösung 42.

(i) Aus dem Newtonschen Gesetz folgt $2y'' = -18y$, i.e.

$$y'' + 9y = 0.$$

(ii) Mit $\omega_0 = \sqrt{9} = 3$ lautet die allgemeine Lösung

$$y(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t), \qquad y'(t) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t).$$

Aus $y(0) = C_1 = 1$ und $y'(0) = 3C_2 = 3$ folgt $C_1 = C_2 = 1$, i.e.

$$y(t) = \cos(3t) + \sin(3t).$$

(iii) Die Periode ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3}.$$

(iv) Die Bedingung $y(t) = 0$ lautet $\cos(3t) + \sin(3t) = 0$. Da $\cos(3t)$ und $\sin(3t)$ nicht gleichzeitig verschwinden, dürfen wir durch $\cos(3t)$ dividieren und erhalten

$$\tan(3t) = -1, \qquad \text{i.e.} \qquad 3t = \frac{3\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die kleinste positive Lösung ist

$$t^* = \frac{\pi}{4}.$$

(v) Die Extremalstellen folgen aus $y'(t) = -3\sin(3t) + 3\cos(3t) = 0$, i.e.

$$\tan(3t) = 1, \qquad \text{i.e.} \qquad 3t = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für gerades n ist $y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, für ungerades n ist $y(t) = -\sqrt{2}$. Die maximale Auslenkung beträgt somit $\sqrt{2}$ und wird erstmals zum Zeitpunkt

$$\tilde{t} = \frac{\pi}{12}$$

erreicht.

Lösung 43.

Mathematik 1, Lisibach André

(i) Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - m^2 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm m$. Die allgemeine Lösung lautet

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}.$$

(ii) Wegen $m > 0$ wächst e^{mx} für $x \to \infty$ unbeschränkt, während e^{-mx} gegen 0 strebt. Damit $\theta(x)$ beschränkt bleibt, muss $C_1 = 0$ gelten. Aus $\theta(0) = C_2 = \theta_0$ folgt

$$\theta(x) = \theta_0 e^{-mx}.$$

Die zweite Konstante wird hier also nicht durch eine zweite Anfangsbedingung, sondern durch die Beschränktheit festgelegt.

(iii) Aus $\theta_0 e^{-mx} = \frac{1}{2}\theta_0$ folgt $e^{mx} = 2$, i.e.

$$x_{1/2} = \frac{1}{m}\log(2).$$

(iv) Aus $\theta_0 e^{-mx} = \frac{1}{100}\theta_0$ folgt $e^{mx} = 100$, i.e.

$$x_1 = \frac{1}{m}\log(100) = \frac{2}{m}\log(10).$$

Jenseits von x_1 ist die Rippe praktisch auf Umgebungstemperatur und gibt kaum noch Wärme ab. Eine Verlängerung der Rippe über einige Vielfache von $\frac{1}{m}$ hinaus bringt somit keine wesentliche Verbesserung der Kühlung.

Lösung 44.

(i) Aus dem Newtonschen Gesetz folgt $4y'' = -16y' - 7y$, i.e.

$$y'' + 4y' + \frac{7}{4}y = 0.$$

Es handelt sich um den Fall starker Dämpfung.

(ii) Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + \frac{7}{4} = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = -2 \pm \frac{3}{2}$, i.e. $\lambda_1 = -\frac{7}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{7}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}, \qquad y'(t) = -\frac{7}{2}C_1 e^{-\frac{7}{2}t} - \frac{1}{2}C_2 e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ führen auf

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad 7C_1 + C_2 = 0$$

mit der Lösung $C_1 = -\frac{1}{6}$, $C_2 = \frac{7}{6}$. Somit ist

$$y(t) = -\frac{1}{6}e^{-\frac{7}{2}t} + \frac{7}{6}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Wegen $y'(t) = \frac{7}{12}\left(e^{-\frac{7}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}t}\right) < 0$ für $t > 0$ fällt $y(t)$ monoton von 1 gegen 0.

(iii) Die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$ führen auf

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad 7C_1 + C_2 = 10$$

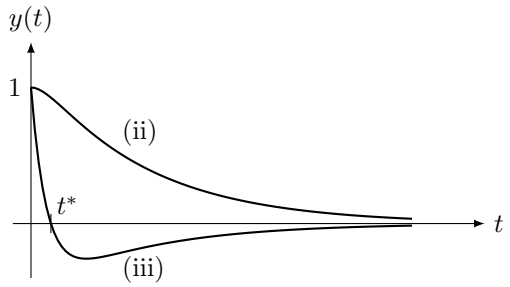
mit der Lösung $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$. Somit ist

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-\frac{7}{2}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}e^{-\frac{7}{2}t}\left(3 - e^{3t}\right).$$

Der Durchgang durch die Ruhelage folgt aus $3 - e^{3t} = 0$, i.e.

$$t^* = \frac{1}{3}\log(3).$$

Mathematik 1, Lisibach André



(iv) Aus

$$y'(t) = -\frac{21}{4}e^{-\frac{7}{2}t} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{4}e^{-\frac{7}{2}t}\left(e^{3t} - 21\right) = 0$$

folgt $e^{3t} = 21$, i.e.

$$\tilde{t} = \frac{1}{3}\log(21).$$

(v) Die Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$, $y'(0) = -5$ führen auf

$$C_1 + C_2 = y_0, \qquad 7C_1 + C_2 = 10$$

mit der Lösung $C_1 = \frac{10-y_0}{6}$, $C_2 = \frac{7y_0-10}{6}$. Die Bedingung $y(t) = 0$ lautet

$$e^{3t} = -\frac{C_1}{C_2} = \frac{10 - y_0}{10 - 7y_0}.$$

Ein Durchgang zu einem Zeitpunkt $t > 0$ existiert genau dann, wenn die rechte Seite grösser als 1 ist. Für $0 < y_0 < \frac{10}{7}$ sind Zähler und Nenner positiv und der Zähler ist grösser als der Nenner, die Bedingung ist also erfüllt. Für $y_0 = \frac{10}{7}$ ist $C_2 = 0$ und $y(t) = C_1 e^{-\frac{7}{2}t}$ besitzt keine Nullstelle. Für $\frac{10}{7} < y_0 < 10$ ist die rechte Seite negativ, für $y_0 \geq 10$ liegt sie in $[0, 1)$. Die Auslenkung muss somit

$$y_0 < \frac{10}{7}$$

betragen.

(vi) Die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = -v_0$ führen auf

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad 7C_1 + C_2 = 2v_0$$

mit der Lösung $C_1 = \frac{2v_0-1}{6}$, $C_2 = \frac{7-2v_0}{6}$. Die Bedingung $y(t) = 0$ lautet

$$e^{3t} = -\frac{C_1}{C_2} = \frac{2v_0 - 1}{2v_0 - 7}.$$

Für $v_0 > \frac{7}{2}$ sind Zähler und Nenner positiv und der Zähler ist grösser, die rechte Seite ist also grösser als 1. Für $v_0 = \frac{7}{2}$ ist $C_2 = 0$ und es gibt keine Nullstelle. Für $\frac{1}{2} < v_0 < \frac{7}{2}$ ist die rechte Seite negativ, für $0 < v_0 \leq \frac{1}{2}$ liegt sie in $[0, 1)$. Somit muss

$$v_0 > \frac{7}{2}$$

gelten.

Lösung 45.

(i) Die Summe der Spannungen in der Masche muss verschwinden, somit haben wir

$$LI' + RI + \frac{1}{C}Q = U.$$

Da U konstant ist, liefert Ableiten mit $Q' = I$ die homogene Gleichung

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = 0, \qquad \text{i.e.} \qquad I'' + 100I' + 10^4 I = 0.$$

Mit $\Delta = \frac{R}{2L} = 50$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100$ gilt $\Delta < \omega_0$, es liegt also schwache Dämpfung vor.

Mathematik 1, Lisibach André

(ii) Die erste Anfangsbedingung ist $I(0) = 0$. Die Maschengleichung zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt mit $I(0) = 0$ und $Q(0) = 0$ die zweite Anfangsbedingung $LI'(0) = U$, i.e. $I'(0) = \frac{U}{L} = 1000$. Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 100\lambda + 10^4 = 0$ besitzt die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -50 \pm \sqrt{2500 - 10000} = -50 \pm 50\sqrt{3}\, j.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$I(t) = e^{-50t}\big(C_1 \cos(50\sqrt{3}t) + C_2 \sin(50\sqrt{3}t)\big).$$

Aus $I(0) = C_1 = 0$ und $I'(0) = 50\sqrt{3}\, C_2 = 1000$ folgt $C_2 = \frac{20}{\sqrt{3}}$, somit

$$I(t) = \frac{20}{\sqrt{3}} e^{-50t} \sin(50\sqrt{3}t).$$

(iii) Wegen $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} I'(t) = 0$ folgt aus der Maschengleichung

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = CU = \frac{1}{10}.$$

Lösung 46. Die beiden homogenen Gleichungen zweiter Ordnung ohne Dämpfungsterm (Term proportional zu y') (Gleichungen 1, 5) gehören zu den beiden ungedämpften Schwingungen. Die Schwingungen unterscheiden sich in den Kreisfrequenzen, welche gegeben sind durch $\sqrt{4} = 2$ (bei 1) und 1 (bei 5), i.e. die Perioden sind π respektive 2π. Somit haben wir

$$1 \leftrightarrow b, \qquad 5 \leftrightarrow a.$$

Für den Graphen c kommen wegen $y(0) = 1$ nur noch 2 und 3 in Frage. Bei 2 ist die Lösung der homogenen Gleichung eine gedämpfte Schwingung mit Kreisfrequenz $\frac{\sqrt{15}}{2}$ und $y_i(x) = 1$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung, i.e. die Lösung schwingt gedämpft um 1. Der Graph c fällt jedoch monoton gegen 0. Somit kommt 2 für c nicht in Frage, i.e.

$$3 \leftrightarrow c.$$

Für die Graphen d, e kommen wegen $y(0) = 0$ nur die Gleichungen 4, 6 in Frage. Nur bei 6 ist die Lösung der homogenen Gleichung eine Schwingung, i.e.

$$4 \leftrightarrow d, \qquad 6 \leftrightarrow e.$$

Das Anfangswertproblem 2 ist nicht dargestellt.

Lösung 47.

(i) $y(x) = \frac{1}{7}e^{3x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$
(ii) $y(x) = 2x^2 - 1 + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$
(iii) $y(x) = -3\cos(x) - \sin(x) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$
(iv) $y(x) = \frac{1}{170}\big(\cos(x) + 4\sin(x)\big) + e^{5x}\big(C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)\big)$
(v) $y(x) = \frac{3}{4}xe^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$
(vi) $y(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x + C_1 + C_2 e^{-3x}$
(vii) $y(x) = \frac{1}{4}x\sin(2x) + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$

Lösung 48.

(i) $y(x) = \frac{1}{13}e^{-3x} - \frac{1}{13}\cos(2x) + \frac{3}{26}\sin(2x)$
(ii) $y(x) = \frac{17}{4} - \frac{17}{4}\cos(2x) + \sin(2x)$
(iii) $y(t) = -\frac{1}{3}\cos(2t) + \frac{4}{3}\cos(t) - \sin(t)$

Lösung 49.

(i) $y_i(x) = \frac{1}{9}e^{3x}$
(ii) $y_i(x) = x + 1$
(iii) Ohne Rechnung, durch Superposition der Lösungen aus (i) und (ii): $y_i(x) = 3 \cdot \frac{1}{9}e^{3x} + 2(x+1) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2x + 2$

Mathematik 1, Lisibach André

Lösung 50.

(i) Die auf die Boje in vertikaler Richtung einwirkenden Kräfte sind die Gewichtskraft mg (nach unten) und die Auftriebskraft $A\rho g x(t)$ (nach oben). Mit x positiv nach unten wird das Newtonsche Gesetz $F = ma$ zu

$$mx'' = mg - A\rho g x,$$

i.e.

$$x'' + \frac{A\rho g}{m} x = g.$$

(ii) Mit

$$\omega = \sqrt{\frac{A\rho g}{m}}$$

lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Die Störfunktion g ist ein Polynom vom Grad 0. Wir machen den Ansatz $x_i(t) = \tilde{C}$. Einsetzen ergibt $\omega^2 \tilde{C} = g$, i.e. $\tilde{C} = \frac{m}{A\rho}$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{m}{A\rho}.$$

Die Konstante $\frac{m}{A\rho}$ ist die Einsinktiefe im Gleichgewicht, i.e. dort sind Gewichtskraft und Auftriebskraft gleich gross.

(iii) Aus $x(0) = C_1 + \frac{m}{A\rho} \stackrel{!}{=} x_0$ folgt

$$C_1 = x_0 - \frac{m}{A\rho}.$$

Aus $x'(0) = C_2 \omega \stackrel{!}{=} 0$ folgt $C_2 = 0$. Somit lautet die partikuläre Lösung

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{m}{A\rho}\right) \cos(\omega t) + \frac{m}{A\rho},$$

i.e. die Boje schwingt harmonisch mit der Kreisfrequenz ω um die Gleichgewichtslage.

Lösung 51.

(i) Mit $\omega_0^2 - (\omega^*)^2 = 2\Delta^2$ gilt

$$(\omega_0^2 - (\omega^*)^2)^2 + (2\Delta\omega^*)^2 = 4\Delta^4 + 4\Delta^2(\omega_0^2 - 2\Delta^2) = 4\Delta^2(\omega_0^2 - \Delta^2)$$

und somit

$$\tilde{C}(\omega^*) = \frac{F_0}{2\Delta\sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}}.$$

(ii) Mit $\tilde{C}(0) = \frac{F_0}{\omega_0^2}$ folgt

$$\frac{\tilde{C}(\omega^*)}{\tilde{C}(0)} = \frac{\omega_0^2}{2\Delta\sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}}.$$

Für $\Delta \ll \omega_0$ gilt $\sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2} \approx \omega_0$ und somit

$$\frac{\tilde{C}(\omega^*)}{\tilde{C}(0)} \approx \frac{\omega_0^2}{2\Delta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\Delta}.$$

(iii) Mit $\Delta = \frac{\omega_0}{10}$ folgt

$$\frac{\tilde{C}(\omega^*)}{\tilde{C}(0)} \approx \frac{\omega_0}{2 \cdot \frac{\omega_0}{10}} = 5,$$

i.e. die Amplitude bei Resonanz ist etwa fünfmal grösser als bei sehr langsamer Anregung.

Mathematik 1, Lisibach André

(iv) Für $\Delta = 0$ und $\omega = \omega_0$ lautet die Gleichung $y'' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega_0 t)$. Mit

$$y_i'(t) = \frac{F_0}{2\omega_0}\big(\sin(\omega_0 t) + \omega_0 t \cos(\omega_0 t)\big),$$
$$y_i''(t) = \frac{F_0}{2\omega_0}\big(2\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 t \sin(\omega_0 t)\big)$$

folgt

$$y_i'' + \omega_0^2 y_i = F_0 \cos(\omega_0 t).$$

Die Amplitude $\frac{F_0}{2\omega_0} t$ wächst linear mit der Zeit über alle Grenzen, i.e. ohne Reibung führt eine Anregung mit der Eigenfrequenz zu einer unbeschränkt wachsenden Schwingung (*Resonanzkatastrophe*).

Lösung 52.

(i) Die Summe der Spannungen in der Masche muss verschwinden, somit haben wir

$$RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = U_0 \sin(\omega t).$$

Ableiten nach der Zeit ergibt mit $Q' = I$ die lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = U_0 \omega \cos(\omega t).$$

(ii) Wir machen den Ansatz

$$I_i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich der Kosinus- und Sinusterme ergibt

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) A + R\omega B = U_0 \omega,$$
$$-R\omega A + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) B = 0.$$

mit Lösung

$$A = \frac{U_0 X}{X^2 + R^2}, \qquad B = \frac{U_0 R}{X^2 + R^2},$$

wobei wir die Abkürzung $X = \frac{1}{\omega C} - \omega L$ verwendet haben.

(iii) Aus $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ folgt $I_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$, i.e.

$$I_0(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{X^2 + R^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}.$$

Mit $\frac{1}{C} = L\omega_0^2$ gilt $X = \frac{L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega}$. Erweitern mit ω ergibt

$$I_0(\omega) = \frac{U_0\, \omega}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}}.$$

(iv) $I_0(\omega)$ ist maximal, wenn der Nenner in der obigen Darstellung von $I_0(\omega)$ minimal ist, i.e. für $X = 0$. Dies ist der Fall für $\frac{1}{\omega C} = \omega L$, i.e. für

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

und der maximale Wert ist $I_0(\omega_0) = \frac{U_0}{R}$. Die Resonanzfrequenz stimmt hier mit der Eigenfrequenz überein. Beim mechanischen System liegt sie dagegen bei $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Delta^2}$ mit $\Delta = \frac{\delta}{2m}$. Der Grund: Der Strom $I = Q'$ entspricht nicht der Auslenkung y, sondern der Geschwindigkeit y'.

Lösung 53.

Mathematik 1, Lisibach André

(i) Mit der Abkürzung $\kappa = \sqrt{\frac{F}{EI}}$ lautet die Gleichung $y'' + \kappa^2 y = 0$. Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \kappa^2 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm j\kappa$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x).$$

(ii) Aus $y(0) = C_1 = 0$ folgt, dass die Lösungen mit $y(0) = 0$ gegeben sind durch

$$y(x) = C \sin(\kappa x), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(iii) Die Bedingung $y(L) = 0$ lautet

$$C \sin(\kappa L) = 0.$$

Eine Möglichkeit ist $C = 0$, i.e. $y(x) \equiv 0$. Die zweite Möglichkeit ist $\sin(\kappa L) = 0$, i.e. wegen $\kappa L > 0$

$$\kappa L = k\pi, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Daraus folgt die Bedingung für die Kraft

$$F = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 EI, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Der kleinste dieser Werte gehört zu $k = 1$. Für eine Kraft

$$F < \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI$$

kommt somit nur die erste Möglichkeit in Frage, i.e. $y(x) \equiv 0$.

(iv) Die kleinste Kraft, für welche eine Lösung $y(x) \not\equiv 0$ existiert, ist

$$F_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI.$$

(v) Die Lösung in der Figur entspricht

$$y(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right),$$

i.e. $\kappa = \frac{2\pi}{L}$ $(k = 2)$. Somit gilt

$$F = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 EI = 4F_0.$$

Lösung 54.

(i) Das resultierende Drehmoment aus der Gravitationskraft ist

$$M = mgl \sin(\varphi) \approx mgl\varphi.$$

Somit wird die Gleichung $M = I\ddot{\varphi}$ zu

$$mgl\varphi = ml^2\ddot{\varphi}, \qquad \text{i.e.} \qquad \ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$\varphi(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}.$$

Die Anfangsbedingungen sind $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{l}$. Daraus folgt $C_2 = -C_1$ und $2C_1\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{v_0}{l}$, i.e. die partikuläre Lösung lautet

$$\varphi(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \left(e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right).$$

Der Winkel wächst exponentiell, i.e. das Pendel kippt um. Die Linearisierung (kleine Winkel) ist deshalb nur für kurze Zeiten gültig.

Mathematik 1, Lisibach André

(ii) Die Feder wird um $\frac{l}{2}\sin(\varphi) \approx \frac{l}{2}\varphi$ ausgelenkt und erzeugt mit dem Hebelarm $\frac{l}{2}$ das rückstellende Moment $-\frac{kl^2}{4}\varphi$. Das resultierende Moment ist somit

$$M \approx mgl\varphi - \frac{kl^2}{4}\varphi$$

und die Differentialgleichung lautet

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{k}{4m} - \frac{g}{l}\right)\varphi = 0.$$

Dies ist eine Gleichung der Form $\ddot{\varphi} + q\varphi = 0$. Periodische Lösungen gibt es genau dann, wenn $q > 0$ (für $q < 0$ wachsen die Lösungen exponentiell, für $q = 0$ linear). Die Bedingung an die Federkonstante lautet somit

$$k > \frac{4mg}{l},$$

und die dazugehörige Kreisfrequenz ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4m} - \frac{g}{l}}.$$

Lösung 55.

(i) Separierbar. Aus $\int \frac{dy}{3y+2} = \int (x^2 - 4)\,dx$ folgt $y(x) = \frac{1}{3}\left(Ce^{x^3-12x} - 2\right)$ und mit $y(0) = 1$

$$y(x) = \frac{1}{3}\left(5e^{x^3-12x} - 2\right).$$

(ii) Separierbar und linear erster Ordnung, beide Wege führen zum Ziel. Separation ($\int \frac{dy}{1+y} = \int dt$) oder integrierender Faktor e^{-t} ergibt $y(t) = Ce^t - 1$ und mit $y(0) = 1$

$$y(t) = 2e^t - 1.$$

(iii) Linear erster Ordnung. Mit dem integrierenden Faktor e^{4t} folgt $\left(e^{4t}y\right)' = 1$, i.e. $y(t) = (t + C)e^{-4t}$, und mit $y(0) = 2$

$$y(t) = (t + 2)e^{-4t}.$$

(iv) Linear erster Ordnung (nicht konstanter Koeffizient). In der Form $y' + \frac{2}{t}y = t - 1 + \frac{1}{t}$ ist der integrierende Faktor $e^{2\log(t)} = t^2$. Aus $\left(t^2 y\right)' = t^3 - t^2 + t$ folgt $y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2}$ und mit $y(1) = \frac{1}{2}$

$$y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}.$$

(v) Linear zweiter Ordnung, homogen. Die charakteristische Gleichung besitzt die Lösungen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$. Mit den Anfangsbedingungen folgt

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(4e^{-t} - e^{-4t}\right).$$

(vi) Linear zweiter Ordnung, homogen. Die charakteristische Gleichung besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = 4 \pm j$. Mit den Anfangsbedingungen folgt

$$y(x) = e^{4x}\big(-4\cos(x) + 15\sin(x)\big).$$

(vii) Linear zweiter Ordnung, inhomogen. Die charakteristische Gleichung besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = -4 \pm j$, der Ansatz $y_i(t) = Ae^{-3t}$ ergibt $A = 1$. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = e^{-4t}\big(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)\big) + e^{-3t}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Aus $y(0) = C_1 + 1 = 2$ folgt $C_1 = 1$, aus $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-2\pi}C_2 + e^{-\frac{3\pi}{2}} = 0$ folgt $C_2 = -e^{\frac{\pi}{2}}$. Somit ist

$$y(t) = e^{-4t}\left(\cos(t) - e^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\right) + e^{-3t}.$$

Lösung 56.

(i) In allen drei Schaltungen fliesst durch beide Elemente derselbe Strom I, da der Ausgang offen ist. Der Maschensatz ergibt:

(a) $U_i = RI + U$. Mit $Q = CU$ gilt $I = CU'$ und somit

$$RCU' + U = U_0.$$

(b) $U_i = RI + U$ mit $U = LI'$. Ableiten der Maschengleichung nach der Zeit ergibt $U_i' = RI' + U' = \frac{R}{L}U + U'$. Für $t > 0$ ist $U_i = U_0$ konstant, i.e. $U_i' = 0$, und somit

$$U' + \frac{R}{L}U = 0.$$

(c) $U_i = LI' + U$. Mit $I = CU'$ gilt $I' = CU''$ und somit

$$LCU'' + U = U_0.$$

(ii) (a) Division durch RC ergibt $U' + \frac{1}{RC}U = \frac{U_0}{RC}$ mit integrierendem Faktor $\mu(t) = e^{\frac{t}{RC}}$. Es folgt

$$\left(Ue^{\frac{t}{RC}}\right)' = \frac{U_0}{RC}e^{\frac{t}{RC}}, \qquad \text{i.e.} \qquad U(t) = U_0 + C_1 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Aus $U(0) = 0$ folgt $C_1 = -U_0$ und somit

$$U(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

(b) Die allgemeine Lösung ist $U(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t}$. Aus $U(0) = U_0$ folgt

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

(c) Mit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ lautet die Gleichung $U'' + \omega_0^2 U = \omega_0^2 U_0$. Die homogene Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)$ und eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist die Konstante U_0. Somit

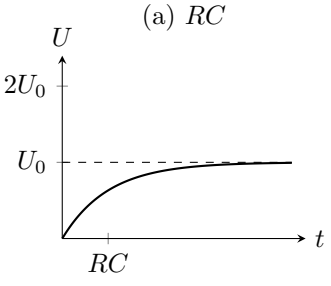
$$U(t) = U_0 + C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t).$$

Aus $U(0) = U_0 + C_1 = 0$ folgt $C_1 = -U_0$ und aus $U'(0) = \omega_0 C_2 = 0$ folgt $C_2 = 0$. Somit

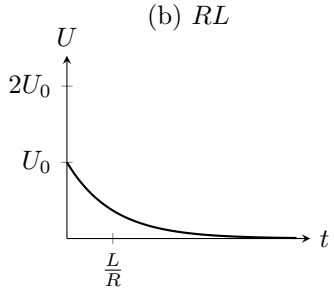
$$U(t) = U_0\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right).$$

Skizze, wobei $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ die Periodendauer bezeichnet:

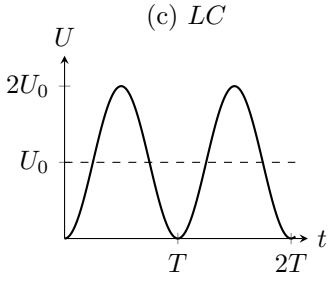
(a) RC



(b) RL



(c) LC



(iii) (a) Es gilt $\lim_{t\to\infty} U(t) = U_0$ und für den Strom

$$I(t) = CU'(t) = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \to 0.$$

Nach langer Zeit fliesst kein Strom mehr, obwohl am Kondensator die Spannung U_0 anliegt. Der Kondensator wirkt wie eine Unterbrechung.

Mathematik 1, Lisibach André

(b) Es gilt $\lim_{t\to\infty} U(t) = 0$ und aus der Maschengleichung folgt für den Strom

$$I(t) = \frac{U_0 - U(t)}{R} = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \to \frac{U_0}{R}.$$

Nach langer Zeit fällt über der Spule keine Spannung mehr ab, obwohl der Strom $\frac{U_0}{R}$ fliesst. Die Spule wirkt wie ein Kurzschluss.

(c) Es gilt

$$I(t) = CU'(t) = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin(\omega_0 t).$$

Die Grenzwerte von $U(t)$ und $I(t)$ existieren nicht. Die Ausgangsspannung schwingt ungedämpft zwischen 0 und $2U_0$ um den Mittelwert U_0, der Strom schwingt um den Mittelwert 0. Ohne Widerstand gibt es keine Dämpfung (vgl. das Feder-Masse-Dämpfungssystem mit $\delta = 0$).

Lösung 57.

(i) In allen drei Schaltungen fliesst durch alle Elemente derselbe Strom I, da der Ausgang offen ist. Der Maschensatz ergibt $U_i = U_R + U_L + U_C$.

(a) Mit $U = U_C$ gilt $I = CU'$, $U_R = RCU'$ und $U_L = LCU''$. Somit

$$LCU'' + RCU' + U = U_0.$$

(b) Ableiten der Maschengleichung $U_i = RI + U_C + U$ nach der Zeit ergibt mit $U_i' = 0$ für $t > 0$ und $CU_C' = I$

$$RI' + \frac{1}{C}I + U' = 0.$$

Mit $U = LI'$ ist $RI' = \frac{R}{L}U$. Nochmaliges Ableiten ergibt $\frac{R}{L}U' + \frac{1}{C}I' + U'' = 0$, i.e. mit $I' = \frac{U}{L}$ und Multiplikation mit LC

$$LCU'' + RCU' + U = 0.$$

(c) Ableiten der Maschengleichung $U_i = LI' + U_C + U$ nach der Zeit ergibt mit $U_i' = 0$ für $t > 0$

$$LI'' + \frac{1}{C}I + U' = 0.$$

Mit $I = \frac{U}{R}$ und Multiplikation mit RC folgt

$$LCU'' + RCU' + U = 0.$$

Alle drei Gleichungen besitzen dieselbe homogene Gleichung. Sie unterscheiden sich nur durch die rechte Seite und (siehe (ii)) durch die Anfangsbedingungen.

(ii) Mit $LC = 10^{-6}$ und $RC = 1.2\cdot 10^{-3}$ lautet die charakteristische Gleichung nach Multiplikation mit 10^6

$$\lambda^2 + 1200\lambda + 10^6 = 0, \qquad \text{i.e.} \qquad \lambda_{1,2} = -600 \pm \sqrt{360000 - 10^6} = -600 \pm 800i.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit

$$U_h(t) = e^{-600t}\left(C_1\cos(800t) + C_2\sin(800t)\right)$$

mit $U_h(0) = C_1$ und $U_h'(0) = -600C_1 + 800C_2$.

(a) Eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist die Konstante U_0, somit $U(t) = U_0 + U_h(t)$. Aus $U(0) = U_0 + C_1 = 0$ folgt $C_1 = -U_0$ und aus $U'(0) = 600U_0 + 800C_2 = 0$ folgt $C_2 = -\frac{3}{4}U_0$. Somit

$$U(t) = U_0\left(1 - e^{-600t}\left(\cos(800t) + \frac{3}{4}\sin(800t)\right)\right).$$

(b) Es ist $U(t) = U_h(t)$. Aus $U(0) = C_1 = U_0$ und $U'(0) = -600U_0 + 800C_2 = -1200U_0$ folgt $C_2 = -\frac{3}{4}U_0$. Somit

$$U(t) = U_0 e^{-600t}\left(\cos(800t) - \frac{3}{4}\sin(800t)\right).$$

Mathematik 1, Lisibach André

(c) Es ist $U(t) = U_h(t)$. Aus $U(0) = C_1 = 0$ und $U'(0) = 800C_2 = 1200U_0$ folgt $C_2 = \frac{3}{2}U_0$. Somit

$$U(t) = \frac{3}{2}U_0 e^{-600t}\sin(800t).$$

(iii) Wegen $e^{-600t} \to 0$ und da cos und sin beschränkt sind, gilt

(a) $\lim_{t\to\infty} U(t) = U_0$, (b) $\lim_{t\to\infty} U(t) = 0$, (c) $\lim_{t\to\infty} U(t) = 0$.

Aus (c) folgt mit $I = \frac{U}{R}$, dass nach langer Zeit kein Strom mehr fliesst. Die gesamte Eingangsspannung liegt dann am Kondensator an.

(iv) Die Ausgangsspannung schwingt nicht, falls die charakteristische Gleichung $LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0$ reelle Nullstellen besitzt, i.e. falls

$$(RC)^2 - 4LC \geq 0, \qquad \text{i.e.} \qquad R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{10^4} = 200.$$

Für $R = 200$ liegt der aperiodische Grenzfall vor.

Lösung 58.

(i) Das Newtonsche Bewegungsgesetz $\Sigma F = ma$ führt auf die Differentialgleichung

$$m\frac{dv}{dt}(t) = F - kv(t).$$

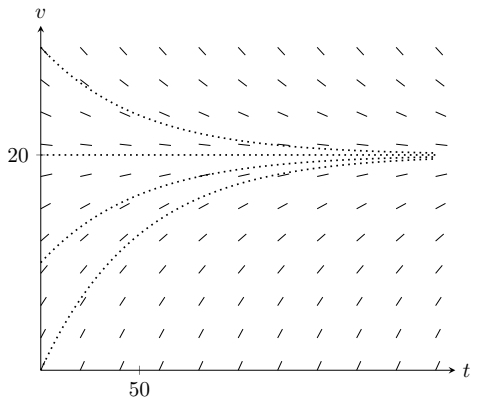
(ii) Die Gleichung ist separierbar

$$\begin{aligned}\int \frac{dv}{F - kv} &= \frac{1}{m}\int dt \\ -\frac{1}{k}\log(F - kv) &= \frac{1}{m}t + C \\ v(t) &= \frac{1}{k}(F - Ce^{-\frac{k}{m}t}).\end{aligned}$$

(iii) Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m}(F - kv) \\ &= \frac{1}{50}(20 - v).\end{aligned}$$

Richtungsfeld mit den Lösungskurven zu $v(0) = 0$, $v(0) = 10$ und $v(0) = 30$:



(iv) Physikalisch: Die beiden Kräfte sind vom Betrag her genau gleich gross, heben sich also auf. Somit folgt

$$F = kv_\infty, \qquad v_\infty = \frac{F}{k} = \frac{200}{10} = 20.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Im Richtungsfeld: Die Steigung ist bei $v = 20$ horizontal, alle Kurven nähern sich der Kurve $v = 20$ für grosse Zeiten asymptotisch an, i.e. $v_\infty = 20$. Mathematisch folgt aus der allgemeinen Lösung

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{F}{k} = 20.$$

(v) Der Start des Bootes entspricht der Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Daraus folgt $C = F$ und die Lösung ist

$$v(t) = \frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$$

Die Zeit t^* erfüllt die Gleichung

$$v(t^*) = \frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t^*}) = \frac{9}{10}\frac{F}{k}.$$

Daraus folgt

$$e^{-\frac{k}{m}t^*} = \frac{1}{10}, \qquad \text{i.e.} \qquad t^* = \frac{m}{k}\log(10) = 50\log(10).$$

(vi) Das Newtonsche Bewegungsgesetz führt auf die Differentialgleichung

$$m\frac{dv}{dt}(t) = F - kv(t)^2.$$

Die Gleichung ist separierbar. Mit $a = \sqrt{\frac{F}{k}}$ gilt $F - kv^2 = k(a^2 - v^2)$ und mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v}\right)$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{m}{k}\int \frac{dv}{a^2 - v^2} &= \int dt \\ \frac{m}{2ak}\left(\log(a+v) - \log(a-v)\right) &= t + C \\ \frac{a+v}{a-v} &= Ce^{\frac{2ak}{m}t}. \end{aligned}$$

Auflösen nach v ergibt mit $\frac{2ak}{m} = \frac{2\sqrt{Fk}}{m}$ die allgemeine Lösung

$$v(t) = \sqrt{\frac{F}{k}}\frac{Ce^{\frac{2\sqrt{Fk}}{m}t} - 1}{Ce^{\frac{2\sqrt{Fk}}{m}t} + 1}.$$

Lösung 59.

(i) Sei $V(t)$ das Volumen der Flüssigkeit im Behälter. Es gilt $V(t) = A_0 h(t)$ und somit haben wir

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(A_0 h(t)) = A_0\frac{dh}{dt}(t).$$

Die Austrittsgeschwindigkeit $w = \sqrt{2gh}$ ergibt nun eine Volumenänderung von

$$\frac{dV}{dt}(t) = -Aw(t) = -A\sqrt{2gh(t)}.$$

Diese beiden Gleichungen ergeben die folgende Differentialgleichung für $h(t)$:

$$A_0\frac{dh}{dt}(t) = -A\sqrt{2gh(t)}.$$

(ii) Die Gleichung ist separierbar. Separation der Variablen und Integration liefert die allgemeine Lösung

$$h(t) = \left(C - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right)^2.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Zusammen mit der Bedingung $h(0) = H$ ergibt sich die partikuläre Lösung

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right)^2.$$

(iii) Die Entleerungszeit t^* ergibt sich aus der Bedingung

$$h(t^*) = \left(\sqrt{H} - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2}}t^*\right)^2 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$t^* = \frac{A_0}{A}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

(iv) Die Masse der Flüssigkeit ist $m(t) = \rho V(t) = \rho A_0 h(t)$ (wobei wir mit ρ die Dichte der Flüssigkeit bezeichnen). Die Gleichung $F(t) = m(t)\frac{dv}{dt}(t)$ mit $F(t) = \text{konst.} = F_0$ wird zu

$$\rho A_0 h(t)\frac{dv}{dt}(t) = F_0.$$

Einsetzen des Ausdruckes für $h(t)$ aus Teilaufgabe (ii) ergibt die Differentialgleichung

$$\rho A_0 \left(\sqrt{H} - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right)^2 \frac{dv}{dt}(t) = F_0.$$

Separation der Variablen führt auf

$$dv = \frac{F_0}{\rho A_0 H}\frac{1}{\left(1 - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2H}}t\right)^2}dt.$$

Verwenden der Konstanten

$$C_1 = \frac{F_0}{\rho A_0 H}, \qquad C_2 = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2H}}$$

vereinfacht die Gleichung zu

$$dv = \frac{C_1}{(1 - C_2 t)^2}dt.$$

Integration ergibt die allgemeine Lösung

$$v(t) = \frac{C_1}{C_2(1 - C_2 t)} + C.$$

Die Bedingung $v(0) = 0$ liefert die partikuläre Lösung

$$v(t) = \frac{C_1}{C_2}\left(\frac{1}{1 - C_2 t} - 1\right) = \frac{C_1 t}{1 - C_2 t}.$$

I.e.

$$v(t) = \frac{F_0 t}{\rho A_0 H\left(1 - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2H}}t\right)}.$$

Lösung 60.

(i)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}y_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y}(3) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

(ii)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -8y_1 + 17y_2 - 3y_3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 17 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung 61.

(i) $\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{\alpha(x-x_0)}$ (ii) $\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} ae^{\alpha(x-x_0)} \\ be^{\beta(x-x_0)} \\ ce^{\gamma(x-x_0)} \end{pmatrix}$

Lösung 62.

(i) Die Newtonsche Bewegungsgleichung $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ wird zu

$$m\overrightarrow{r}'' + 2k\overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}.$$

In Komponenten ist dies

$$mx'' + 2kx = 0,$$
$$my'' + 2ky = 0.$$

(ii) Die allgemeine Lösung ist

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} \sin(\omega_0 t) + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} \cos(\omega_0 t),$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$.

(iii) Die partikuläre Lösung zu den gegebenen Anfangsbedingungen ist

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega_0 t) \\ \frac{b}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}.$$

(iv) Die Konstanten sind

$$A = a, \qquad B = \frac{b}{\omega_0}.$$

Lösung 63.

(i) $\overrightarrow{y}(x) = \frac{9}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x}$, Sattelpunkt.

(ii) $\overrightarrow{y}(x) = \frac{13}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$, Sattelpunkt.

(iii) $\overrightarrow{y}(x) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4x} + \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x}$, Repeller.

(iv) $\overrightarrow{y}(x) = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$, Attraktor.

Lösung 64. Die allgemeine Lösung lautet

$$\overrightarrow{y}(x) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Die partikuläre Lösung nähert sich für $x \to \infty$ dem Ursprung an, falls $C_1 = 0$. Dies wird erreicht durch $\alpha = -\beta$.

Lösung 65.

Mathematik 1, Lisibach André

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\overrightarrow{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}$$

(iii) Der Anfangswert $\overrightarrow{y}(0)$ muss ein Vielfaches eines Eigenvektors sein, i.e. $\beta = 2\alpha$ oder $\beta = \alpha$.

Lösung 66.

(i) Aus dem Maschensatz für die beiden Maschen folgt

$$U_1 = U_{R_1} = R_1 \tilde{I} = R_1(-I_1 - I_2),$$
$$U_1 = U_2 + U_{R_2} = U_2 + R_2 I_2,$$

wobei wir mit U_{R_i} die Spannung über den Widerstand R_i (von links nach rechts) und mit $\tilde{I}$ den Strom durch den Widerstand R_1 (von links nach rechts) bezeichnen. Für die dritte Gleichung in der ersten Zeile haben wir den Knotensatz für den linken mittleren Knoten verwendet. Für einen Kondensator gilt $U = \frac{Q}{C}$ und somit $U' = \frac{I}{C}$. Dies eingesetzt in die rechten Seiten der obigen Gleichungen ergibt

$$U_1 = R_1(-C_1 U_1' - C_2 U_2'),$$
$$U_1 = U_2 + R_2 C_2 U_2'.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$U_2' = \frac{1}{R_2 C_2}(U_1 - U_2).$$

Dies eingesetzt in die erste Gleichung ergibt

$$U_1' = -\frac{1}{R_1 C_1} U_1 + \frac{1}{R_2 C_1}(U_2 - U_1).$$

(ii) Wir haben

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix}.$$

(iii) Die gegebenen Werte eingesetzt ergibt

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aus $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ folgen die Eigenwerte $\lambda_+ = -1$, $\lambda_- = -4$. Dazugehörige Eigenvektoren sind

$$\overrightarrow{f}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{f}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$\overrightarrow{U}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t}.$$

(iv) Wir haben

$$\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Tangente gegeben durch

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

(v) Damit sich die Lösung auf einer Geraden befindet, muss $\overrightarrow{U}(t)$ ein Vielfaches eines Eigenvektors sein. Das heisst entweder

$$\overrightarrow{U}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \text{daraus folgt} \qquad U_1(0) = \frac{1}{2} U_2(0),$$

oder

$$\overrightarrow{U}(t) = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t}, \qquad \text{daraus folgt} \qquad U_1(0) = -U_2(0).$$

Lösung 67.

(i) Aus $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)^2 + 1 = 0$ folgen die Eigenwerte $\lambda_\pm = 1 \pm j$. Ein Eigenvektor zu $\lambda_+ = 1 + j$ ist $\overrightarrow{f}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\overrightarrow{f}_+ e^{\lambda_+ x} = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \Big(\cos(x) + j \sin(x) \Big) = e^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + j e^x \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}.$$

Real- und Imaginärteil ergeben die reellen Basislösungen

$$\overrightarrow{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{y}_2(x) = e^x \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}.$$

Aus $\overrightarrow{y}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, i.e.

$$\overrightarrow{y}(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{Re}(\lambda_\pm) = 1 > 0$ ist der Ursprung ein Repeller. Die Kurve ist eine Spirale nach aussen, welche im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird; der Abstand zum Ursprung ist $|\overrightarrow{y}(x)| = e^x$.

(ii) Aus $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (-1-\lambda)^2 + 1 = 0$ folgen die Eigenwerte $\lambda_\pm = -1 \pm j$. Ein Eigenvektor zu $\lambda_+ = -1 + j$ ist wiederum $\overrightarrow{f}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$. Analog zu (i) ergeben sich die reellen Basislösungen

$$\overrightarrow{y}_1(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{y}_2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$$

und die Lösung zur Anfangsbedingung

$$\overrightarrow{y}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{Re}(\lambda_\pm) = -1 < 0$ ist der Ursprung ein Attraktor. Die Kurve ist eine Spirale nach innen, welche im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird; der Abstand zum Ursprung ist $|\overrightarrow{y}(x)| = e^{-x}$.

Lösung 68.

(i) Mit $y_1 = y$, $y_2 = y'$ folgt $y_1' = y_2$, $y_2' = y'' = 4y' - 5y$, i.e.

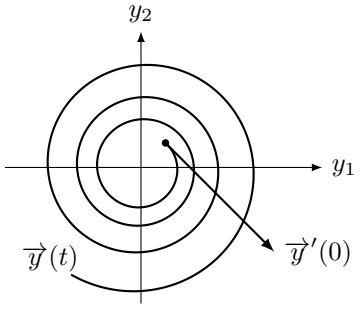
$$\overrightarrow{y}' = A \overrightarrow{y}, \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ entsprechen $\overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dies entspricht den Koordinaten $(y_1, y_2) = (1, 1)$ im Phasenraum. Der Tangentialvektor an die Lösungskurve in diesem Punkt ist gegeben durch

$$\overrightarrow{y}'(0) = A \overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

(iii) Die Eigenwerte der Matrix A sind $2 \pm j$. Der Realteil ist positiv, somit ist die Lösungskurve eine Spirale nach aussen und der Fixpunkt ist ein Repeller (instabil). Aus (ii) folgt, dass die Spirale im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.



Lösung 69.

(i) Auf die Masse M wirken die Federkraft $-kx$ und die Dämpferkraft $-b(x'-y')$, auf die Masse m die Federkraft $-ky$ und die Dämpferkraft $-b(y'-x')$. Die Dämpferkraft hängt von der Relativgeschwindigkeit der beiden Massen ab. Mit dem Newtonschen Gesetz folgen die Bewegungsgleichungen

$$Mx'' + b(x'-y') + kx = 0,$$
$$my'' + b(y'-x') + ky = 0.$$

(ii) Mit $z_2' = x'' = -\frac{k}{M}x - \frac{b}{M}x' + \frac{b}{M}y'$ und $z_4' = y'' = \frac{b}{m}x' - \frac{k}{m}y - \frac{b}{m}y'$ ist die Matrix A in $\overrightarrow{z}' = A\overrightarrow{z}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} & 0 & \frac{b}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}.$$

Lösung 70.

(i) Das System wird durch zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben:

$$M_i = I_i\ddot{\varphi}_i, \qquad I_i = m_i l^2, \qquad i = 1, 2.$$

Für kleine Winkel φ_1, φ_2 kann angenommen werden, dass die Feder horizontal wirkt und dass $\sin(\varphi_i) \approx \varphi_i$, $\cos(\varphi_i) \approx 1$. Die Feder wird um $\frac{l}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$ gedehnt, die Federkraft $k\frac{l}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$ wirkt mit dem Hebelarm $\frac{l}{2}$. Somit sind die wirkenden Drehmomente gegeben durch

$$M_1 = -m_1 gl\varphi_1 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 k(\varphi_2 - \varphi_1),$$
$$M_2 = -m_2 gl\varphi_2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 k(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Somit sind die Differentialgleichungen

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{g}{l}\varphi_1 + \frac{k}{4m_1}(\varphi_2 - \varphi_1),$$
$$\ddot{\varphi}_2 = -\frac{g}{l}\varphi_2 - \frac{k}{4m_2}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

(ii) Mit

$$z_1 = \varphi_1, \qquad z_2 = \dot{\varphi}_1, \qquad z_3 = \varphi_2, \qquad z_4 = \dot{\varphi}_2$$

folgt

$$\dot{\overrightarrow{z}} = A\overrightarrow{z},$$

Mathematik 1, Lisibach André

mit

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{l} - \frac{k}{4m_1} & 0 & \frac{k}{4m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{4m_2} & 0 & -\frac{g}{l} - \frac{k}{4m_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 71.

(i) Aus $A\vec{c} = -\vec{r}$, i.e. $c_1 - 2c_2 = -1$, $3c_1 - 4c_2 = -1$, folgt $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Die Eigenwerte von A sind -2 und -1 mit den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit $\vec{y}_i = \vec{c}$ lautet die allgemeine Lösung

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

(iii) Aus $2C_1 + C_2 = 3$, $3C_1 + C_2 = 2$ folgt $C_1 = -1$, $C_2 = 5$, i.e.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Für $x \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen den Fixpunkt $\vec{c} = (1, 1)$, dieser ist ein Attraktor.

(iv) Mit $\vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y} + \vec{r}$ gilt

$$\vec{y}_1 = \vec{y}_0 + h\vec{f}(\vec{y}_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 - 6 + 1 \\ 12 - 12 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Lösung 72.

(i) Mit $y_1 = y$, $y_2 = y'$ gilt

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{r}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Aus $A\vec{c} = -\vec{r}$, i.e. $c_2 = 0$, $-2c_1 - 3c_2 = -4$, folgt $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\lambda^2 + 3\lambda + 2$, i.e. -1 und -2. Der Fixpunkt ist ein Attraktor.

(iii) Der Fixpunkt entspricht $y = 2$, $y' = 0$: Die Masse ist in Ruhe, und zwar in der Position $y = \frac{F}{k} = 2$, in welcher die Federkraft die äussere Kraft gerade aufhebt. Die konstante Kraft verschiebt also die Ruhelage. Da der Fixpunkt ein Attraktor ist, kommt die Masse für jede Anfangsbedingung in dieser neuen Ruhelage zur Ruhe.

Lösung 73.

(i) Mit $y_1' = y_2$ und $y_2' = -y_1$ gilt

$$\frac{d}{dx}\left(y_1^2 + y_2^2\right) = 2y_1y_1' + 2y_2y_2' = 2y_1y_2 - 2y_2y_1 = 0.$$

Somit ist $|\vec{y}(x)|^2$ und damit $|\vec{y}(x)|$ konstant.

(ii) Mit $\vec{y}_k = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + h\vec{f}(\vec{y}_k) = \begin{pmatrix} u + hv \\ v - hu \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} |\vec{y}_{k+1}|^2 &= (u + hv)^2 + (v - hu)^2 \\ &= u^2 + 2huv + h^2v^2 + v^2 - 2huv + h^2u^2 \end{aligned}$$

Mathematik 1, Lisibach André

$$= (1+h^2)(u^2+v^2) = (1+h^2)|\overrightarrow{y}_k|^2.$$

(iii) Der Abstand zum Ursprung wächst in jedem Schritt um den Faktor $\sqrt{1+h^2} > 1$. Die numerische Lösung ist somit eine Spirale nach aussen, während die exakte Kurve ein Kreis ist. Die Methode von Euler verändert hier also das qualitative Verhalten der Lösung. Mit kleinerer Schrittweite wird der Effekt kleiner, für jede Schrittweite $h > 0$ bleibt die numerische Lösung aber eine Spirale nach aussen.

(iv) Mit $|\overrightarrow{y}_0|^2 = 1$ und $1 + h^2 = \frac{5}{4}$ folgt

$$|\overrightarrow{y}_4|^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

4. Laplacetransformation

4.1. **Definition.** Sei $f(t)$ gegeben. Die Funktion

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

heisst *Laplacetransformation* der Funktion $f(t)$. Symbolisch schreiben wir[4]

$$F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right), \qquad \text{oder} \qquad f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)\ .$$

Wir nennen $f(t)$ die *Originalfunktion* und $F(s)$ die *Bildfunktion*. In Anwendungen ist t oft die Zeit und $f(t)$ beschreibt eine zeitabhängige Grösse. In diesem Fall wird $f(t)$ auch *Zeitfunktion* genannt.

Bemerkungen:

(i) Im Allgemeinen ist $s \in \mathbb{C}$.

(ii) Präziser wird die Laplacetransformation mit der unteren Integrationsgrenze 0^- definiert:

$$F(s) = \int_{0^-}^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Für gewöhnliche Funktionen $f(t)$ ändert dies nichts, da der Beitrag des Intervalls $[\varepsilon, 0]$ für $\varepsilon \to 0^-$ verschwindet. Wir schreiben deshalb im Folgenden als untere Grenze einfach 0. Wichtig wird die Unterscheidung bei der Transformation der Deltafunktion, siehe Teilabschnitt *Deltafunktion*.

4.2. **Erste Beispiele.** Unter der provisorischen Annahme dass $s \in \mathbb{R}$ berechnen wir erste Beispiele von Transformationen.

(i) Sei $f(t) = 1$. Dann haben wir

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt.$$

Für die weiteren Berechnungen in diesem Beispiel unterscheiden wir die Fälle $s = 0$ und $s \neq 0$. Im Fall $s = 0$ haben wir

$$F(0) = \int_0^\infty e^{-0}dt = \int_0^\infty dt$$

und somit existiert $F(s) = \mathcal{L}\left(1\right)$ für $s = 0$ nicht. Im Fall $s \neq 0$ haben wir

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt &= \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^T \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1-e^{-sT}}{s}. \end{aligned}$$

Gilt nun $s > 0$ so haben wir

$$F(s) = \frac{1}{s}.$$

Gilt aber $s < 0$ so haben wir

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} = \infty$$

und in diesem Fall existiert $F(s) = \mathcal{L}\left(1\right)$ auch nicht. Wir finden also

$$\mathcal{L}\left(1\right) = \begin{cases} \frac{1}{s} & s > 0, \\ \text{nicht definiert} & s \leq 0. \end{cases}$$

[4] In der Literatur wird oft auch die Notation (mit geschweiften Klammern) $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ verwendet.

Mathematik 1, Lisibach André

(ii) Sei $f(t) = t$. Im Fall $s \leq 0$ gilt $e^{-st} \geq 1$ und somit $te^{-st} \geq t$ für $t \geq 0$. Da bereits $\int_0^\infty t\,dt$ divergiert, existiert $F(s)$ in diesem Fall nicht. Im Fall $s > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt &= \int_0^\infty te^{-st}dt \\ &= -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Zeile partielle Integration verwendet haben. Der erste Term verschwindet, da für $s > 0$ der Faktor e^{-st} schneller gegen Null geht als t wächst, i.e. $\lim_{t\to\infty} te^{-st} = 0$. Das verbleibende Integral ist gleich $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$. Wir finden somit

$$\mathcal{L}(t) = \begin{cases} \frac{1}{s^2} & s > 0, \\ \text{nicht definiert} & s \leq 0. \end{cases}$$

(iii) Sei $f(t) = e^{at}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Dann haben wir

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt.$$

Im Fall $s = a$ ist der Integrand gleich 1 und das Integral divergiert (wie in Beispiel 1 mit $s = 0$). Im Fall $s \neq a$ haben wir

$$F(s) = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\Big|_0^\infty.$$

Dieser Ausdruck existiert nur falls $s > a$. Wir finden also

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & s > a, \\ \text{nicht definiert} & s \leq a. \end{cases}$$

4.3. **Konvergenzbereich.** In diesem Teilabschnitt widmen wir uns den Fragen:

(i) Für welche Funktionen $f(t)$ existiert eine Laplacetransformation?

(ii) Wie sieht der Definitionsbereich von $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ aus, i.e. für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $F(s)$?

Wir illustrieren die Ideen zuerst an den bereits besprochenen Beispielen $f(t) = 1$ und $f(t) = e^{at}$ indem wir die Annahme $s \in \mathbb{R}$ weglassen.

Sei $f(t) = 1$. Wir haben

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

Wir schreiben $s = \alpha + j\beta$ (mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Wir haben

$$\begin{aligned} e^{-sT} = e^{-(\alpha+j\beta)T} &= e^{-\alpha T}e^{-j\beta T} \\ &= e^{-\alpha T}(\cos(-\beta T) + j\sin(-\beta T)). \end{aligned}$$

Der Faktor $\cos(-\beta T) + j\sin(-\beta T)$ befindet sich in der komplexen Ebene auf dem Einheitskreis und der Betrag davon ist somit konstant. Für den reellen Vorfaktor $e^{-\alpha T}$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0, \\ 1 & \alpha = 0, \\ \infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

und wir finden für $s \neq 0$ (der Fall $s = 0$ wurde bereits in Beispiel 1 behandelt)

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} = \begin{cases} 0 & \text{Re}(s) > 0, \\ \text{nicht definiert} & \text{Re}(s) \leq 0. \end{cases}$$

I.e. die Laplacetransformation von $f(t) = 1$ mit der Angabe des Definitionsbereichs $H \subset \mathbb{C}$ ist

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \qquad H = \{s \in \mathbb{C} | \text{Re}(s) > 0\}.$$

Der Konvergenzbereich entspricht der komplexen rechten Halbebene (ohne die Gerade $\text{Re}(s) = 0$).

Mathematik 1, Lisibach André

Als nächstes betrachten wir $f(t) = e^{at}$. Wir haben

$$F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1 - e^{(a-s)T}}{s-a}.$$

Für Konvergenz benötigen wir $\mathrm{Re}(a-s) < 0$. Somit ist die Laplacetransformation von $f(t) = e^{at}$ mit der Angabe des Definitionsbereichs $H \subset \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}, \qquad H = \{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)\}.$$

Im Folgenden verallgemeinern wir die Betrachtung. Dazu benötigen wir *Funktionen exponentieller Ordnung*. Eine Funktion $f(t)$ ist von exponentieller Ordnung, falls es Konstanten a, M gibt, so dass

$$|f(t)| \leq Me^{at} \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

I.e. eine Funktion $f(t)$ ist von exponentieller Ordnung falls sie höchstens exponentiell wächst. Das kleinstmögliche a heisst *exponentielle Ordnung* von $f(t)$. Beispiele sind:

Funktion	Exponentielle Ordnung
$f(t) = 1$	0
$f(t) = \cos(\omega t)$	0
$f(t) = \sin(\omega t)$	0
$f(t) = e^{ct}$	c

Bemerkungen:

(i) Ein Gegenbeispiel für eine Funktion welche nicht von exponentieller Ordnung ist, ist

$$f(t) = e^{t^2}$$

(diese Funktion wächst 'zu schnell').

(ii) Ein kleinstmögliches a muss nicht existieren. Ein Beispiel ist $f(t) = t$: Jede Exponentialfunktion e^{at} mit $a > 0$ wächst schneller als t, egal wie klein a ist. Mit einem genügend grossen Vorfaktor M gilt somit $t \leq Me^{at}$ für jedes $a > 0$. Für $a = 0$ geht dies jedoch nicht, denn t ist durch keine Konstante M beschränkt. Man sagt in diesem Fall trotzdem, $f(t) = t$ habe die exponentielle Ordnung 0.

Theorem 4.1. *Für $f(t)$ von exponentieller Ordnung a konvergiert die Laplacetransformation $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > a$.*

Beweis: Wir nehmen an dass $f(t)$ von exponentieller Ordnung ist, i.e. $|f(t)| \leq Me^{at}$ und dass sich s im Definitionsbereich befindet, i.e. $\mathrm{Re}(s) > a$. Nun ist zu zeigen dass die Laplacetransformation existiert. Da $\mathrm{Re}(s) > a$, lässt sich s schreiben als $s = (a+\alpha) + jb$ mit $\alpha > 0$. Wir haben

$$\begin{aligned}
|f(t)e^{-st}| &= \left| f(t)e^{-(a+\alpha)t}e^{-jbt} \right| \\
&= \left| f(t)e^{-(a+\alpha)t} \right| \\
&= |f(t)| \left| e^{-(a+\alpha)t} \right| \\
&\leq Me^{at}e^{-(a+\alpha)t} \\
&= Me^{-\alpha t},
\end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile verwendet haben dass $|e^{-jbt}| = 1$. Die Transformation ist gegeben durch

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Wegen obiger Ungleichung ist aber die Funktion welche integriert wird im Betrag von oben beschränkt durch eine Funktion welche integrierbar ist und somit selbst integrierbar. I.e. die Transformation von $f(t)$ existiert, i.e. $\mathcal{L}(f(t))$ konvergiert.

Mathematik 1, Lisibach André

Existiert kein kleinstmögliches a (wie bei $f(t) = t$), so verwendet man im Beweis statt der exponentiellen Ordnung a eine etwas grössere Zahl, welche immer noch kleiner als $\mathrm{Re}(s)$ ist. Der Beweis bleibt sonst gleich.

Bemerkungen:

(i) Alle von uns in dieser Vorlesung betrachteten Funktionen sind von exponentieller Ordnung und besitzen somit eine Laplacetransformation.

(ii) In den Anwendungen spielt t meistens die Rolle der Zeit. Da der Exponent im Ausdruck e^{-st} dimensionslos sein muss, spielt s die Rolle einer (komplexen) Frequenz.

(iii) Die Grenze σ des Konvergenzbereichs ($F(s)$ existiert für $\mathrm{Re}(s) > \sigma$, aber nicht für $\mathrm{Re}(s) < \sigma$) heisst *Konvergenzabszisse*. Laut obigem Satz ist σ höchstens gleich der exponentiellen Ordnung a. Für die Funktionen in dieser Vorlesung gilt $\sigma = a$.

4.4. **Linearität und trigonometrische Funktionen.**

Theorem 4.2 (Linearität)**.** *Seien C_1, C_2 (reelle oder komplexe) Konstanten und $f_1(t)$, $f_2(t)$ gegebene Funktionen. Dann gilt*

$$\mathcal{L}\left(C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\right) = C_1 \mathcal{L}\left(f_1(t)\right) + C_2 \mathcal{L}\left(f_2(t)\right),$$

i.e. die Laplacetransformation ist linear.

Der Beweis folgt direkt aus der Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\right) &= \int_0^\infty (C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)) e^{-st} dt \\
&= \int_0^\infty C_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty C_2 f_2(t) e^{-st} dt \\
&= C_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + C_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\
&= C_1 \mathcal{L}\left(f_1(t)\right) + C_2 \mathcal{L}\left(f_2(t)\right).
\end{aligned}$$

Somit kann bei Summen gliedweise transformiert werden. Beispiel:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(7 + 3t\right) &= \mathcal{L}\left(7\right) + \mathcal{L}\left(3t\right) \\
&= 7\mathcal{L}\left(1\right) + 3\mathcal{L}\left(t\right) \\
&= \frac{7}{s} + \frac{3}{s^2}.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen die Transformation der trigonometrischen Funktionen $\sin(t)$, $\cos(t)$. Dazu verwenden wir

$$\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}, \qquad \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\cos(t)\right) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left(e^{jt}\right) + \mathcal{L}\left(e^{-jt}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j}\right) \\
&= \frac{s}{s^2+1},
\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Zeile Linearität und für die zweite Zeile die Transformation $\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}$ verwendet haben. Analog zu dieser Rechnung findet man die Transformation von $\sin(t)$. Wir haben

$$\mathcal{L}\left(\sin(t)\right) = \frac{1}{s^2+1}, \qquad \mathcal{L}\left(\cos(t)\right) = \frac{s}{s^2+1}.$$

4.5. **Transformation von $f(t) = t^n$.** Wir haben bereits gesehen

$$\mathcal{L}\left(1\right) = \frac{1}{s}, \qquad \mathcal{L}\left(t\right) = \frac{1}{s^2}.$$

Mathematik 1, Lisibach André

Sei $f(t) = t^2$. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(t^2\right) &= \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt \\ &= -\frac{t^2}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty t e^{-st} dt \\ &= \frac{2}{s}\mathcal{L}\left(t\right) \\ &= \frac{2}{s^3}.\end{aligned}$$

Der Randterm in der zweiten Zeile verschwindet wie beim Beispiel $f(t) = t$. Man beachte den Ausdruck in der zweitletzten Zeile, i.e. man beachte dass gilt

$$\mathcal{L}\left(t^2\right) = \frac{2}{s}\mathcal{L}\left(t\right).$$

Sei nun $f(t) = t^3$. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(t^3\right) &= \int_0^\infty t^3 e^{-st} dt \\ &= -\frac{t^3}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{3}{s}\int_0^\infty t^2 e^{-st} dt \\ &= \frac{3}{s}\mathcal{L}\left(t^2\right) \\ &= \frac{6}{s^4}.\end{aligned}$$

Man beachte auch hier den Ausdruck in der zweitletzten Zeile, i.e. man beachte dass gilt

$$\mathcal{L}\left(t^3\right) = \frac{3}{s}\mathcal{L}\left(t^2\right).$$

Analog findet man für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathcal{L}\left(t^n\right) = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\right).$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(t^n\right) &= \frac{n}{s}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\right) \\ &= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\mathcal{L}\left(t^{n-2}\right) \\ &= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}\underbrace{\mathcal{L}\left(1\right)}_{=\frac{1}{s}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

Wegen $0! = 1$ gilt diese Formel auch für $n = 0$, i.e. $\mathcal{L}\left(1\right) = \frac{1}{s}$.

4.6. **Ähnlichkeit und Dämpfung.**

Theorem 4.3 (Ähnlichkeit)**.** *Sei $f(t)$ eine gegebene Funktion, $a > 0$ eine Konstante und sei $F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}\left(f(at)\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Der Beweis beruht auf der Substitution $u = at$ (wegen $a > 0$ bleiben die Integrationsgrenzen 0 und ∞ dabei erhalten):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(f(at)\right) &= \int_0^\infty f(at) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^\infty f(u) e^{-\frac{su}{a}} du}_{=F\left(\frac{s}{a}\right)}\end{aligned}$$

Mathematik 1, Lisibach André

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Transformation von $\cos(\omega t)$. Wir haben $f(t) = \cos(t)$ und aus

$$F(s) = \mathcal{L}(\cos(t)) = \frac{s}{s^2+1}$$

folgern wir durch Ähnlichkeit

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Analog findet man

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Theorem 4.4 (Dämpfung)**.** *Sei $f(t)$ eine gegebene Funktion, a eine Konstante und sei $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}\left(e^{-at} f(t)\right) = F(s+a).$$

Der Beweis ist die Rechnung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(e^{-at} f(t)\right) &= \int_0^\infty e^{-at} f(t) e^{-st} dt \\
&= \int_0^\infty f(t) e^{-(a+s)t} dt \\
&= F(s+a).
\end{aligned}$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Transformation von $e^{-3t}\sin(t)$. Wir haben $f(t) = \sin(t)$ und aus

$$F(s) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1}$$

folgern wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(e^{-3t}\sin(t)\right) &= F(s+3) \\
&= \frac{1}{(s+3)^2+1}.
\end{aligned}$$

Mit der Eigenschaft Dämpfung erhalten wir insbesondere die folgenden Transformationen, welche später bei der Rücktransformation wichtig werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(e^{-at}\cos(\omega t)\right) &= \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}, \\
\mathcal{L}\left(e^{-at}\sin(\omega t)\right) &= \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}, \\
\mathcal{L}\left(t^n e^{-at}\right) &= \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Mathematik 1, Lisibach André

5. Aufgaben zu Laplacetransformation

Aufgabe 74. Basierend auf der Definition der Laplacetransformation bestimme man die Laplacetransformation von $f(t) = \sin(t)$ und $g(t) = \cos(t)$. Man verwende zweifache partielle Integration.

Aufgabe 75. Unter Verwendung der Definition der Laplacetransformation bestimme man

(i) $\mathcal{L}\left(e^{kt}\right)$
(ii) $\mathcal{L}\left(\cosh(2t)\right)$
(iii) $\mathcal{L}\left(3+t\right)$
(iv) $\mathcal{L}\left(t^2\right)$
(v) $\mathcal{L}\left(te^{-t}\right)$

Hinweis zu (ii): $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$

Aufgabe 76. Unter Benutzung der Definition der Laplacetransformation bestimme man die Transformation des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1 & a < t \leq b \\ 0 & t > b \end{cases}$$

Mathematik 1, Lisibach André

Lösung 74. Wir haben

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt.$$

Durch partielle Integration folgt

$$\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt = \underbrace{\sin(t)\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt.$$

Für das auftretende Integral auf der rechten Seite verwenden wir nochmals partielle Integration:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt &= \frac{1}{s}\left(\underbrace{\cos(t)\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty}_{=\frac{1}{s}} - \frac{1}{s}\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt\right)\\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

Dies eingesetzt in der obigen Gleichung eingesetzt ergibt

$$\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt.$$

Diese Gleichung lässt sich nach $\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt$ auflösen:

$$\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt = \frac{\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s^2+1},$$

i.e.

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Analog findet man

$$\mathcal{L}(\cos(t)) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Lösung 75.

(i) $\frac{1}{s-k}$
(ii) $\frac{s}{s^2-4}$
(iii) $\frac{3s+1}{s^2}$
(iv) $\frac{2}{s^3}$
(v) $\frac{1}{(s+1)^2}$

Lösung 76. $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$

Mathematik 1, Lisibach André