MATHEMATIK 1
VERSION 2. Dezember 2025

LISIBACH ANDRÉ

Das Gewicht der Vorlesung liegt auf konkreten Rechnungen und weniger auf abstrakten Formulierungen. Deshalb befinden sich im Skript viele Rechenbeispiele und weitere werden im Unterricht besprochen. Wir benutzen Kursivschrift für Begriffsdefinitionen.

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

In den Analysisvorlesungen wurden (meist) gegebene Funktionen auf ihre Eigenschaften hin untersucht (analysiert). Beim Studium von Differentialgleichungen werden Gesetzmässigkeiten aus Physik, Ökonomie, Biologie usw. mathematisch formuliert und dazu Lösungen gesucht. Die Formulierungen sind in der Form von Differentialgleichungen, die Lösungen davon sind Funktionen welche die interessierenden Grössen, meist in Abhängigkeit der Zeit, beschreiben.

1.1. **Einführende Beispiele.** Ohne die auftretenden Begriffe im Detail zu erklären (siehe nachfolgenden Teilabschnitt), werden einfache Beispiele und Anwendungen betrachtet.

1.1.1. *Kinematik.* Wir betrachten eine eindimensionale Bewegung mit konstanter Beschleunigung und interessieren uns für die Position in Abhängigkeit der Zeit. Die Voraussetzung konstanter Beschleunigung ist beispielsweise beim freien Fall in Erdnähe in guter Näherung gegeben. Die Gesetzmässigkeit welche das kinematische Problem beschreibt ist

$$\frac{d^2 s}{dt^2}(t) = a,$$

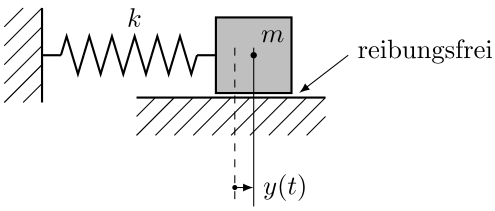
wobei wir mit $s(t)$ die Position in Abhängigkeit der Zeit t und mit a die konstante Beschleunigung bezeichnen. Daraus folgt durch zweifache unbestimmte Integration

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2,$$

wobei C_1, C_2 Integrationskonstanten sind. Mit den Anfangsbedingungen $s(0) = s_0$ (Position zum Zeitpunkt $t = 0$) und $v(0) = v_0$ (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$) folgt

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0.$$

1.1.2. *Dynamik.* Wir betrachten das mechanische System:



Wir bezeichnen mit m die Masse, mit k die Federkonstante und mit $y(t)$ die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage. Der Körper werde aus der Ruhelage ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Wir interessieren uns für die Auslenkung aus der Ruhelage in Abhängigkeit der Zeit. Die Gesetzmässigkeit welche dieses Problem beschreibt ist das

Bewegungsgesetz von Newton, i.e. $F = ma$, wobei wir mit F die Kraft auf den Körper und mit a dessen Beschleunigung bezeichnen. Mit

$$F(t) = -ky(t), \qquad a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t).$$

folgt

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) = -Ky(t), \qquad \text{wobei} \qquad K = \frac{k}{m}.$$

Mögliche Lösungen dieser Gleichung sind

$$\begin{aligned} y(t) &= C\sin(\sqrt{K}t) \\ y(t) &= C\cos(\sqrt{K}t) \\ y(t) &= C_1\cos(\sqrt{K}t) + C_2\sin(\sqrt{K}t), \end{aligned}$$

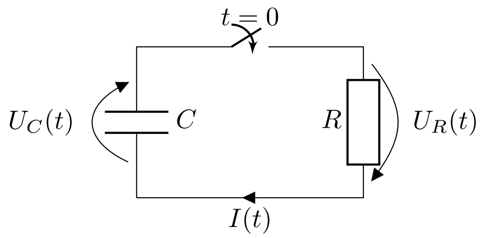
wobei C, C_1, C_2 Konstanten sind. Diese möglichen Lösungen beschreiben harmonische Schwingungen. Die letzte davon, zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0, \qquad v(0) = \frac{dy}{dt}(0) = v_0$$

ergibt

$$y(0) = y_0\cos(\sqrt{K}t) + \frac{v_0}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}t).$$

1.1.3. *Elektrotechnik.* Wir betrachten die Schaltung:



Auf dem Kondensator befinde sich eine Ladung Q_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Wir interessieren uns für die Ladung Q auf dem Kondensator in Abhängigkeit der Zeit t. Die Gesetzmässigkeit zur Beschreibung der Situation ist die Kirchhoffsche Maschenregel:

$$U_C(t) + U_R(t) = 0.$$

Zusätzlich haben wir die Gesetze

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \qquad U_R(t) = RI(t).$$

Eingesetzt in obige Gleichung, zusammen mit $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$, erhalten wir

$$\frac{dQ}{dt}(t) = -\frac{1}{RC}Q(t).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t},$$

welche auch die Anfangsbedingung $Q(0) = Q_0$ erfüllt.

1.2. **Grundbegriffe.**

1.2.1. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* der *Ordnung* n ist eine Gleichung in welcher eine unbekannte Funktion $y(x)$, ihre Ableitungen bis zur Ordnung n und die Variable x auftreten. Beispiele:[1]

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(x) &= -12y(x),\\
\frac{d^2y}{dx^2}(x) + 4\frac{dy}{dx}(x) + 2y(x)^2 &= \cos(x),\\
y''y' + yy' &= 0,\\
\sqrt{y^{(17)}} + \sin^2(y') &= x^4.
\end{aligned}$$

Diese vier Differentialgleichung sind von der Ordnung 1, 2, 2 und 17.

Der Begriff *gewöhnlich* wiederspiegelt den Fakt dass nur Funktionen von einer unbekannten Variablen (in den obigen Beispielen ist dies x, wenn es sich um dynamische Probleme handelt werden wir aber meist t (als Zeitvariable) verwenden) und somit auch nur (gewöhnliche) Ableitungen nach dieser Variabel auftreten. Dies im Gegensatz zu den partiellen Differentialgleichungen, in welchen Funktionen von meherer Variablen und somit partielle Ableitungen auftreten. Ein Beispiel für eine partielle Differentialgleichung ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Partielle Differentialgleichungen sind nicht Gegenstand der vorliegenden Betrachungen.

1.2.2. *Explizite und implizite Darstellung.* Ist in der Differentialgleichung die höchste auftretende Ableitung als Funktion der Ableitungen niedrigerer Ordnung und der Variabel x gegeben, so nennt man die Darstellung der Differentialgleichung *explizit*:

$$y^{(n)} = G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

In dieser Gleichung ist G eine gegebene Funktion. Beispiele für Gleichungen in expliziter Darstellung:

$$\begin{aligned}
y' &= -4y,\\
y'' &= y' + 2y + x,\\
y^{(3)} &= (y')^2 + y^2,\\
\frac{d^2y}{dx^2}(x) &= -7\frac{dy}{dx}(x).
\end{aligned}$$

Das Gegenstück zur expliziten Darstellung ist die *implizite* Darstellung einer Differentialgleichung:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

wobei in dieser Gleichung F eine gegebene Funktion ist. Beispiele für Gleichungen in impliziter Darstellung:

$$\begin{aligned}
y'y'' + y^2 &= 0,\\
y(x)\frac{d^2y}{dx^2}(x) + \cos\left(\frac{dy}{dx}(x)\right) - x^2 &= 0.
\end{aligned}$$

[1] Wir weisen darauf hin dass im folgenden verschiedene Notationen für Funktionen und ihre Ableitungen verwendet werden. Auch werden oft die Argumente von Funktionen zur besseren Übersicht nicht notiert. Beispielsweise sind

$$\begin{aligned}
y' + y'' &= x,\\
\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} &= x,\\
\frac{dy}{dx}(x) + \frac{d^2y}{dx^2}(x) &= x
\end{aligned}$$

die selben Differentialgleichungen.

Oft ist es möglich eine implizit gegebene Differentialgleichung auf explizite Form umzuschreiben. Beispielsweise kann

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

auf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

umgeschrieben werden.

1.2.3. *Lösung.* Eine *Lösung* einer Differentialgleichung ist eine Funktion $y(x)$, welche die Differentialgleichung identisch, i.e. für alle x im betrachteten Intervall, erfüllt. Für eine gegebene Lösung wird dies durch einsetzen überprüft. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung und Funktion

$$y' = x + y, \qquad y(x) = e^x - x - 1.$$

Einsetzen von $y(x)$ in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt

$$y' = e^x - 1.$$

Einsetzen von $y(x)$ in die rechte Seite der Differentialgleichung ergibt

$$x + y = x + e^x - x - 1 = e^x - 1.$$

Die beiden erhaltenen Ausdrücke stimmen überein. Somit handelt es sich bei der gegebenen Funktion $y(x)$ um eine Lösung der Differentialgleichung. Bei dem betrachteten Intervall in diesem Beispiel handelt es sich um die gesamten reellen Zahlen.

1.2.4. *Allgemeine Lösung.* Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}(x) = x.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung finden wir durch unbestimmte Integration der rechten Seite:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wir sehen also dass für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = x$ ist. Das heisst dass wir unendlich viele Lösungen gefunden haben. Diese Erkenntnis gilt allgemein, i.e. eine gewöhnliche Differentialgleichung besitzt im allgemeinen unendlich viele Lösungen. Die Menge aller Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird als *allgemeine Lösung* bezeichnet.

Die Differentialgleichung $y' = x$ ist ein Beispiel einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx}(x) = f(x),$$

wobei $f(x)$ eine gegebene Funktion ist. Wir sehen dass jede Stammfunktion $F(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Da sich zwei Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante unterscheiden, ergibt sich die allgemeine Lösung durch Wahl einer festen Stammfunktion $F(x)$ und Addition einer Konstanten

$$y(x) = F(x) + C.$$

Nicht immer führt die Addition einer Konstanten zu einer Lösung auf die allgemeine Lösung. Beispiel: Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}(x) = y(x).$$

besitzt die Lösung $y(x) = e^x$. Jedoch erfüllt $y(x) = e^x + C$ die Differentialgleichung nicht. Die allgemeine Lösung (siehe unten) ist gegeben durch

$$y(x) = Ce^x.$$

Was den beiden obigen Typen von Differentialgleichungen gemeinsam ist, ist die Tatsache dass die allgemeine Lösung eine Konstante enthält. Man sagt auch einen *Parameter*.

Dies hängt damit zusammen dass die beiden Typen von Differentialgleichungen beide erster Ordnung sind. Wir betrachten nun die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = x.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich durch zweifache unbestimmte Integration zu

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2,$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind. Die betrachtete Differentialgleichung ist zweiter Ordnung und die zugehörgige allgemeine Lösung hängt von zwei Konstanten ab. Allgemein gilt dass die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung von n Konstanten $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ abhängt. Das erste einführende Beispiel gibt für diesen Sachverhalt die physikalische Interpretation. In diesem Beispiel wird die Position in Abhängigkeit der Zeit gesucht, wenn man voraussetzt dass die Beschleunigung konstant ist. Die Lösung hängt von zwei Konstanten ab, der Position und der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$.

1.2.5. *Partikuläre Lösung.* Wir betrachten wieder die Differentialgleichung $y' = x$. Die allgemeine Lösung davon ist

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sei nun für das betrachtete Problem die weitere Bedingung $y(0) = 1$ gegeben. Setzen wir $x = 0$ in der allgemeinen Lösung ein, so erhalten wir

$$y(0) = C.$$

Aufgrund der gegebenen Bedingung muss dieser Ausdruck nun gleich eins sein. Es folgt somit $C = 1$ und die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

Diese Funktion heisst *partikuläre Lösung* der Differentialgleichung $y' = x$ zur Bedingung $y(0) = 1$.

1.2.6. *Anfangsbedingungen.* Die Bedingungen, welche zu einer partikulären Lösung führen, können in zwei unterschiedlichen Formen vorliegen. Sind die Bedingungen in einer Weise formuliert, welche zu Werten der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen für ein festes $x = x_0$ führen, so heissen die Bedingungen *Anfangsbedingungen.*

Betrachten wir beispielsweise die Differentialgleichung des obigen kinematischen Beispiels: $y'' = a$ (für konstantes a) und geben wir Werte für die Position und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ vor, so sind dies Anfangsbedingungen.

Die meisten Probleme der Kinematik oder Dynamik werden als *Anfangswertprobleme* formuliert, i.e. die Differentialgleichung zusammen mit Anfangsbedingungen ist gegeben und es wird die partikuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung zu den gegebenen Anfangsbedingungen gesucht.

1.2.7. *Randbedingungen.* Führen die gegebenen Bedingungen zu Werten der gesuchten Funktion für verschiedene Werte von x, so heissen die Bedingungen *Randbedingungen.* Das Problem des Auffindens einer partikulären Lösung einer gegebenen Differentialgleichung mit gegebenen Randwerten heisst *Randwertproblem.*

Als Beispiel eines Randwertproblems betrachten wir einen zweiseitig aufgelegten Balken unter Eigenlast und suchen die Auslenkung y in Abhängigkeit der horizontalen Koordinate x. Die Gesetzmässigkeit, welche dieses Problem beschreibt ist die Differentialgleichung der Balkenbiegung

$$y''(x) = \frac{1}{EI}M(x),$$

wobei wir mit E den Elastizitätsmodul des betrachteten Materials, mit I das Widerstandsmoment zweiter Ordnung und mit $M(x)$ das wirkende Moment in Abhängigkeit der horizontalen Koordinate x bezeichnen. Die Länge des Balkens sei L. Aus der konstanten Streckenlast q folgt das Moment $M(x) = \frac{q}{2}(Lx - x^2)$ und die Differentialgleichung wird zu

$$y''(x) = K(Lx - x^2), \qquad \text{mit} \qquad K = \frac{q}{2EI}.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich durch zweifache unbestimmte Integration zu

$$y(x) = K\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1 x + C_2.$$

Die Bedingung der beidseitigen Auflage (bei $x = 0$ und $x = L$) ergibt die Werte

$$y(0) = y(L) = 0.$$

Die beiden Bedingungen in die allgemeine Lösung eingesetzt führt auf die Gleichungen

$$y(0) = C_2 \stackrel{!}{=} 0, \qquad \begin{aligned} y(L) &= K\left(\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12}\right) + C_1 L \\ &= \frac{KL^4}{12} + C_1 L \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$C_1 = -\frac{KL^3}{12}, \qquad C_2 = 0$$

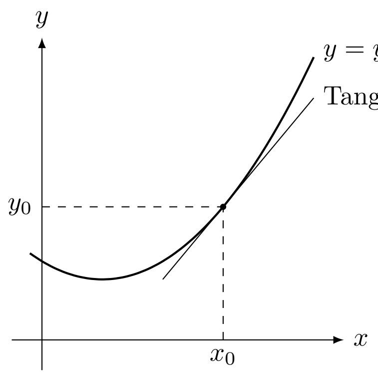
und die partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) &= K\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{L^3 x}{12}\right) \\ &= \frac{q}{24EI}\left(2Lx^3 - x^4 - L^3 x\right). \end{aligned}$$

1.3. **Geometrische Betrachtung: Richtungsfeld.** Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

für eine gegebene Funktion $f(x, y)$. Sei $y(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Im folgenden bezeichnen wir den Graphen $y = y(x)$ als *Lösungskurve*. Sei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Lösungskurve $y = y(x)$. Wir betrachten nun die Tangente an die Lösungskurve in diesem Punkt:



Die Steigung dieser Tangente ist gegeben durch

$$m = \frac{dy}{dx}(x_0) = f(x_0, y_0).$$

I.e. die Steigung der Lösungskurve in einem Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch $f(x_0, y_0)$. Insbesondere ist somit die Steigung der Lösungskurve bekannt, ohne Kenntnis der Lösung $y(x)$.

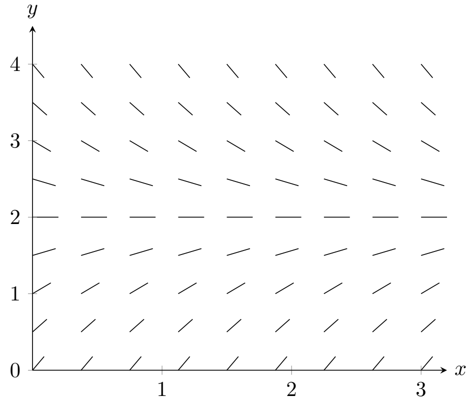
Durch diese Erkenntniss ist für jeden zulässigen Punkt (x_0, y_0) die Richtung der Lösungskurve, welche durch diesen Punkt verläuft, gegeben. Die Darstellung dieser Richtungen als kurzes Tangentenstück wird als *Richtungsfeld* bezeichnet. Wir illustrieren am Beispiel der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 2 - y,$$

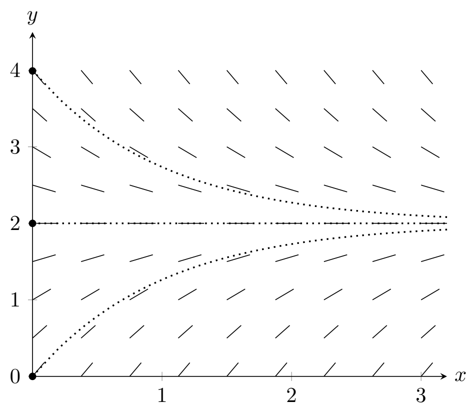
für $x \geq 0$. I.e. $f(x, y) = 2 - y$. Für eine effiziente Konstruktion des Richtungsfeldes setzt man die Funktion $f(x, y)$ gleich einer Konstanten m:

$$f(x, y) = m.$$

Die Lösung dieser Gleichung für festes m wird als *Isokline* bezeichnet. Für die Wahl $m = 0$ ergibt sich die Gleichung $2 - y = 0$ mit Lösung $y = 2$. I.e. entlang der Isokline $y = 2$ ist die Steigung des Richtungsfeldes gleich 0. Für $m = 1$ ergibt sich die Isokline $y = 1$, für $m = -1$ ergibt sich die Isokline $y = 3$. Wir erhalten das Richtungsfeld:



Lösungskurven $y = y(x)$ der Differentialgleichung verlaufen in jedem Punkt (x, y) parallel zum Richtungsfeld und können somit bei gegebenem Richtungsfeld skizziert werden. Wir skizzieren für das Beispiel drei Lösungskurven, welche durch die Punkte $(x_0, y_0) = (0, 0), (0, 2), (0, 4)$ verlaufen:



Diese drei Lösungskurven entsprechen den drei partikulären Lösungen der Differentialgleichung $y' = 2 - y$ zu den drei Anfangsbedingungen $y(0) = 0, 2, 4$.

Bemerkungen:

(i) Die so skizzierten Lösungskurven entsprechen einem qualitiativen Bild der Lösungen der Differentialgleichung.

(ii) Aus diesem qualitativen Bild lässt sich das Langzeitverhalten ablesen. Mit dem Langzeitverhalten ist das Verhalten der Lösung für $x \to \infty$ gemeint. Im obigen Beispiel sehen wir dass für alle möglichen Anfangsbedingungen jeweils

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 2$$

gilt.

(iii) Die Gesamtmenge der Lösungskurven entspricht der allgmeinen Lösung der Differentialgleichung.
(iv) Durch einen Punkt (x_0, y_0) verläuft genau eine Lösungskurve. Das heisst dass zu einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ genau eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ existiert.

1.4. **Separierbare Gleichungen.**

1.4.1. *Theorie.* Eine Differentialgleichung erster Ordnung heisst *separierbar*, wenn sie in der Form

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

geschrieben werden kann. Mit Argumenten (y ist eine Funktion von x) ist diese Gleichung

$$h(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = g(x).$$

Sei nun $H(x)$ eine Stammfunktion von $h(x)$. Dann kann die linke Seite folgendermassen umgeschrieben werden:

$$h(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = \frac{d}{dx}H(y(x)).$$

(Dies folgt aus der Kettenregel, der Ausdruck $\frac{dy}{dx}(x)$ ist die innere Ableitung der verketteten Funktion $H(y(x))$). Die Differentialgleichung ist nun von der Form

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = g(x).$$

Unbestimmte Integration liefert

$$H(y(x)) = G(x) + C,$$

wobei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist. Das Auflösen dieser Gleichung nach $y(x)$ (falls möglich) liefert die allgmeine Lösung $y(x)$. Die partikuläre Lösung ergibt sich durch eine Anfangsbedingung, welche die Konstante C fixiert.

1.4.2. *Formales Vorgehen.* Wir betrachten

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Das formale Vorgehen unterteilt sich in die folgenden Schritte:

(i) Separieren der Variablen
Formale Multiplikation mit dx liefert

$$h(y)dy = g(x)dx.$$

Die linke Seite beinhaltet nur noch die Variable y, die rechte Seite beinhaltet nur noch die Variable x, i.e. die Variablen sind separiert.

(ii) Integration
Unbestimmte Integration

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

liefert

$$H(y) = G(x) + C.$$

Hier sind $H(y)$, $G(x)$ Stammfunktionen von $h(y)$ respektive $g(x)$.

(iii) Auflösen
Auflösen liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C).$$

Die partikuläre Lösung ergibt sich durch eine Anfangsbedingung, welche die Konstante C fixiert.

Wir illustrieren die einzelnen Schritte am Beispiel

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x, \qquad y(1) = \frac{1}{25}.$$

(i) Separation:

$$\frac{dy}{y^2} = 6xdx.$$

(ii) Integration:

$$-\frac{1}{y} = 3x^2 + C.$$

(iii) Auflösen ergibt die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{3x^2 + C}.$$

Mit $y(1) = 1/25$ folgt die partikuläre Lösung

$$y(x) = \frac{1}{28 - 3x^2}.$$

Ein wichtiges Beispiel ist die Gleichung

$$y' = ky, \qquad y(0) = 0, \qquad \text{konst.} = k \in \mathbb{R},$$

Separation und unbestimmte Integration liefert

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx.$$

Ausführen der Integration ergibt

$$\log(y) = kx + C_1.$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) = e^{kx+C_1} &= e^{C_1}e^{kx} \\ &= C_2e^{kx}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ haben wir die partikuläre Lösung

$$y(x) = y_0e^{kx}.$$

Bemerkung: Genau genommen kann die Konstante C_2 in der obigen Herleitung nur positive Werte annehmen da sie aus der Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$ durch $C_2 = e^{C_1}$ hervorgeht. Wir haben jedoch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\log(|x|) &= \begin{cases} \frac{d}{dx}\log(x) & x \geq 0 \\ \frac{d}{dx}\log(-x) & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\int \frac{1}{x}dx = \log(|x|) + C.$$

In der obigen Herleitung haben wir also

$$\log(|y|) = kx + C_1.$$

Dies ergibt

$$|y| = C_2e^{kx}$$

(mit $C_2 = e^{C_1} > 0$) und daraus folgen die Lösungen

$$y = C_2e^{kx}, \qquad y = -C_2e^{kx}.$$

Diese Lösungen zusammen mit der offensichtlichen Lösung[2] $y(x) \equiv 0$ lassen sich aber zusammenfassen zur allgemeinen Lösung

$$y(x) = Ce^{kx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Diese Lösung stimmt mit der Lösung der obigen 'naiven' Herleitung überein.

Wir fassen das Resultat dieses Beispiels nochmals zusammen: Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y' = ky, \qquad k \in \mathbb{R},$$

lautet

$$y(x) = Ce^{kx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

1.5. **Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.** Eine Differentialgleichung erster Ordnung heisst *linear* wenn sie in der Form

$$y' = p(x)y + q(x)$$

geschrieben werden kann. Hier sind $p(x)$ und $q(x)$ gegebene Funktionen. Die Funktion $q(x)$ heisst *Störfunktion*. Die Gleichung heisst *homogen* falls $q(x) \equiv 0$, ansonsten *inhomogen*.

Die folgende Tabelle illustriert die eingeführten Begriffe an Beispielen:

Gleichung	linear	homogen	separierbar
$y' = y^2$	nein	-	ja
$y' = x^2$	ja	nein	ja
$y' = e^{-x}y$	ja	ja	ja
$y' = xy + e^{-x}$	ja	nein	nein
$y' = xy + x$	ja	nein	ja

Wir betrachten nun die folgenden beiden Differentialgleichungen:

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{1}$$
$$y' = p(x)y. \tag{2}$$

Man nennt die zweite Gleichung die zugehörige homogene Gleichung zur ersten (inhomogenen) Gleichung (i.e. das ist diejenige Gleichung die man bekommt wenn man bei einer inhomogenen Gleichung die Störfunktion weglässt).

Es gilt das folgende:

(i) Gleichung (2) hat die allgemeine Lösung $y_h(x) = Ce^{P(x)}$, wobei $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.
(ii) Sei $y_h(x)$ eine Lösung von Gleichung (2) und sei $y_i(x)$ eine Lösung von Gleichung (1). Dann ist die Funktion $y_h(x) + y_i(x)$ eine Lösung von Gleichung (1).
(iii) Zwei Lösungen der Gleichung (1) unterscheiden sich (nur) in einer Lösung der Gleichung (2).

Beweis:

(i) Dies folgt direkt aus der Tatsache dass sich die homogene Gleichung (2) separieren lässt. Siehe den vorhergehenden Abschnitt zu separierbaren Gleichungen.
(ii) Wir setzen die Funktion $y_h(x) + y_i(x)$ in die Gleichung (1) ein:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y_h(x) + y_i(x)) &= \frac{dy_h}{dx}(x) + \frac{dy_i}{dx}(x)\\ &= p(x)y_h(x) + p(x)y_i(x) + q(x)\\ &= p(x)(y_h(x) + y_i(x)) + q(x),\end{aligned}$$

wobei wir von der ersten auf die zweite Zeile verwendet haben dass $y_h(x)$ eine Lösung der Gleichung (2) und $y_i(x)$ eine Lösung der Gleichung (1) ist. Dies zeigt dass die Funktion $y_h(x) + y_i(x)$ eine Lösung der Gleichung (1) ist.

[2] $f(x) \equiv 0$ bedeutet dass die Funktion $f(x)$ identisch, also für alle x, gleich Null ist.

(iii) Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Gleichung (1). I.e. es gilt

$$\frac{dy_1}{dx}(x) = p(x)y_1(x) + q(x),$$
$$\frac{dy_2}{dx}(x) = p(x)y_2(x) + q(x).$$

Die Differenz $y_1(x) - y_2(x)$ erfüllt somit

$$\frac{d}{dx}(y_1(x) - y_2(x)) = p(x)(y_1(x) - y_2(x)),$$

i.e. die Differenz erfüllt Gleichung (2).

Die folgende Überlegung führt nun auf die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir nehmen an wir kennen eine Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Gleichung. Wenn wir nun eine Lösung der homogenen Gleichung dazu addieren erhalten wir wieder eine Lösung der inhomogenen Gleichung (siehe (ii)). Da wir von der homogenen Gleichung beliebig viele Lösungen kennen (wir kennen alle Lösungen dieser Gleichung, i.e. wir kennen die allgemeine Lösung (siehe (i))), können wir diese jeweils zur Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Gleichung dazu addieren und erhalten somit auch beliebig viele Lösungen der inhomogenen Gleichung. Die Frage ist nun ob wir auf diesem Weg alle Lösungen der inhomogenen Gleichung finden? Da sich zwei solche Lösungen aber nur in einer Lösung der homogenene Gleichung unterscheiden (siehe (iii)) und wir zu unserer Lösung alle Lösungen der homogenen Gleichung dazu addieren, bekommen wir in der Tat auf diesem Weg alle Lösungen der inhomogenen Gleichung.

Wir schliessen somit das folgende: Falls wir eine spezielle Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Gleichung und alle Lösungen $y_h(x)$ der homogenen Gleichung (dies ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung) kennen, dann gibt es für jede beliebige Lösung $y(x)$ der inhomogenen Gleichung eine Lösung $y_h(x)$ der homogenen Gleichung, so dass gilt

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x).$$

I.e. die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Wir notieren dies als Theorem:

Theorem. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

lautet

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x),$$

wobei $y_h(x) = Ce^{P(x)}$ (mit $P(x)$ einer Stammfunktion von $p(x)$) die allgemeine Lösung der Gleichung $y' = p(x)y$ und $y_i(x)$ eine Lösung der Gleichung $y' = p(x)y + q(x)$ ist.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$y' = -2y + 3.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = -2y$ ist (gefunden durch Separation der Variablen)

$$y_h(x) = Ce^{-2x}.$$

Nun benötigen wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = -2y + 3$. Diese ist $y_i(x) = \frac{3}{2}$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}.$$

Bemerkungen:

(i) Die Gleichung in diesem Beispiel wäre auch direkt durch Separation der Variablen lösbar.

(ii) Die Lösung $y_i(x) = \frac{3}{2}$ wurde durch raten gefunden. Im allgemeinen ist dies nicht so einfach möglich. Ein allgemeineres Verfahren zum Auffinden einer Lösung der inhomogenen Gleichung wird im nächsten Teilabschnitt besprochen (Variation der Konstanten).

(iii) Die verbleibende Konstante C in der Lösung wird durch eine Anfangsbedingung fixiert.

1.5.1. *Variation der Konstanten.* Die Methode mit dem Namen *Variation der Konstanten* wird verwendet um für die lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden.

Das Vorgehen ist das folgende: In der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $y_h(x) = Ce^{P(x)}$ wird die auftretende Konstante C durch eine (noch) unbekannte Funktion $\varphi(x)$ ersetzt, i.e. die Konstante wird variert. Wir erhalten dadurch den Ansatz

$$y_i(x) = \varphi(x)e^{P(x)}.$$

Einsetzen dieses Ansatzes in die inhomogene Gleichung führt auf eine Differentialgleichung für $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x)e^{P(x)} = q(x).$$

Die Lösung davon ist

$$\varphi(x) = \int q(x)e^{-P(x)}dx$$

und somit lautet die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_i(x) = \varphi(x)e^{P(x)} = e^{P(x)} \int q(x)e^{-P(x)}dx.$$

(Auf der rechten Seite tritt hier ein unbestimmtes Integral auf, welches die Menge der Stammfunktionen von $q(x)e^{-P(x)}$ bezeichnet. Bei der Ausführung der Integration kann die Integrationskonstante weggelassen werden, da wir nur an einer Lösung der inhomogenen Gleichung interessiert sind). Mit $y(x) = y_h(x) + y_i(x)$ erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = p(x)y + q(x)$:

$$y(x) = Ce^{P(x)} + e^{P(x)} \int q(x)e^{-P(x)}dx,$$

wobei $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.

Mit dieser zusätzlichen Erkenntnis erweitern wir das Theorem aus dem vorhergehenden Abschnitt.

Theorem. Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

lautet

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x),$$

wobei

$$y_h(x) = Ce^{P(c)}, \qquad y_i(x) = e^{P(x)} \int q(x)e^{-P(x)}dx$$

(mit $P(x)$ einer Stammfunktion von $p(x)$). Hier ist $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = p(x)y$ und $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = p(x)y + q(x)$.

Bemerkungen:

(i) Wie oben bereits vermerkt kann bei der Ausführung der Integration die Integrationskonstante weggelassen werden, da wir nur an einer Lösung der inhomogenen Gleichung interessiert sind und durch die Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten.

(ii) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung enthält eine Konstante C. Diese steckt in $y_h(x)$. Wie üblich wird C durch eine Anfangsbedingung fixiert und ergibt auf diese Weise eine partikuläre Lösung.

(iii) Für Anwendungen empfielt es sich nicht sich die obigen Formeln zu merken. Man verwendet das folgende Vorgehen:

   (a) Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $y_h(x)$ durch Separation der Variablen.

   (b) Berechnung einer Lösung der inhomogenen Gleichung $y_i(x)$ durch Variation der Konstanten mit dem Ansatz $y_i(x) = \varphi(x)e^{P(x)}$.

   (c) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist $y(x) = y_h(x)+y_i(x)$.

Wir illustrieren die Schritte am Beispiel

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^4}.$$

(a) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Separation ergibt

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \text{i.e.} \qquad y_h(x) = Cx.$$

(b) Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz (Variation der Konstanten)

$$y_i(x) = \varphi(x)x.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\varphi'(x)x + \varphi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{x^4}, \qquad \text{i.e.} \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{x^5}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4x^4}$$

(wir lassen die Integrationskonstante weg da wir nur an einer Lösung der inhomogenen Gleichung interessiert sind). Somit haben wir

$$y_i(x) = -\frac{1}{4x^3}.$$

(c) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= Cx - \frac{1}{4x^3}. \end{aligned}$$

1.6. **Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.** Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung heisst linear wenn sie von der Form

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

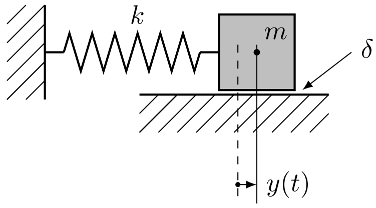
ist. Wir nennen die Funktion $r(x)$ *Störfunktion.* Im Fall $r(x) \equiv 0$ bezeichnen wir die Gleichung als homogen, ansonsten als inhomogen. Im folgenden beschränken wir uns auf den wichtigen Fall wo p, q Konstanten sind, i.e. die Koeffizienten der Gleichung sind konstant.

1.6.1. *Homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten.* Eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Wobei $p, q \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

Eine wichtige Klasse von Systemen, in welchen eine Gleichung dieser Form zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens auftritt, ist die Klasse von mechanischen Systemen bestehend aus Masse, Feder und geschwindigkeitsproportionaler Reibung. Als Vertreter für Systeme dieser Art betrachten wir die folgende Anordnung:



Es handelt sich um eine Masse, welche sich horizontal (und in einer Dimension) bewegen kann. Die Masse ist über eine (lineare) Feder mit der festen Struktur verbunden und es wirkt auf die Masse eine Reibungskraft welche proportional zur Geschwindigkeit ist.

Wir bezeichnen mit m die Masse, mit k die Federkonstante, mit δ den Reibungskoeffizienten und mit $y(t)$ die Auslenkung aus der (gestrichelt eingezeichneten) Ruhelage. Die Auslenkung besitzt ein Vorzeichen und ist rechts von der Ruhelage positv. Die einwirkenden Kräfte sind die Federkraft F_F und die Reibungskraft F_R. In Abhängigeit der Auslenkung $y(t)$ und der Geschwindigkeit $y'(t)$ sind diese

$$F_F = -ky(t), \qquad F_R = -\delta y'(t).$$

Aus dem Newtonschen Gesetz ($F = ma$) folgt

$$-ky(t) - \delta y'(t) = my''(t),$$

i.e.

$$y'' + \frac{\delta}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0.$$

Diese Gleichung ist somit von der Form einer homogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $y'' + py' + qy = 0$, wobei $p = \delta/m$ und $q = k/m$.

1.6.2. *Erste Lösungen im Fall $p = 0$.* Mit $p = 0$ ist die Differentialgleichung von der Form

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

wobei wir die Grösse $\omega_0 = \sqrt{q}$ eingeführt haben. Aus der Sicht des mechanischen Systems beschreibt die Differentialgleichung in dieser Form ein System ohne Reibung. Wir erwarten somit Lösungen in der Form von harmonischen Schwingungen. Durch Einsetzen sieht man sofort dass

$$y_1(x) = \sin(\omega_0 x), \qquad y_2(x) = \cos(\omega_0 x)$$

Lösungen der Gleichung sind. Diese Lösungen besitzen Amplituden von Eins. Aus der Sicht des mechanischen Systems erwarten wir jedoch Lösungen mit beliebigen (aber konstanten) Amplituden. In der Tat sind Vielfache der obigen beiden Lösungen wieder Lösungen der Gleichung. Beispielsweise

$$y_3(x) = 7\sin(\omega_0 x), \qquad y_4(x) = -19\cos(\omega_0 x).$$

Da die Sinus- und Kosinuslösungen sehr speziellen Anfangsbedingungen entsprechen (Sinus: Keine Auslenkung und maximale Geschwindigkeit, Kosinus: Maximale Auslenkung und keine Geschwindigkeit), erwarten wir eine allgemeine harmonische Schwingung als allgemeine Lösung. Diese kann in der Form

$$y(x) = C_1 \sin(\omega_0 x) + C_2 \cos(\omega_0 x)$$

geschrieben werden, i.e. als Linearkombination der Lösungen $y_1(x) = \sin(\omega_0 x)$, $y_2(x) = \cos(\omega_0 x)$. Man überprüft durch Einsetzen dass Funktionen dieser Form Lösungen der Differentialgleichung sind.

1.6.3. *Superpositionsprinzip.* Die Erkenntnisse aus den den ersten Lösungen führen auf den folgenden Satz:

Theorem 1.1 (Superpositionsprinzip)**.** *Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung*

$$y'' + py' + qy = 0$$

und seien C_1, C_2 Konstanten. Dann ist die Linearkombination

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

auch eine Lösung von $y'' + py' + qy = 0$.

Beweis:
Wir setzen die Linearkombination $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned}(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' \\ +q(C_1y_1 + C_2y_2) &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + pC_1y_1' + pC_2y_2' + qC_1y_1 + qC_2y_2 \\ &= C_1 \underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{=0} + C_2 \underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{=0} \\ &= 0,\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile verwendet haben dass $y_1(x)$, $y_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Somit ist die Linearkombination $C_1y_1 + C_2y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung.

Bemerkung: Das Superpositionsprinzip gilt für alle linearen homogenen Differentialgleichungen (auch mit nicht-konstanten Koeffizienten), zum Beispiel auch für die lineare, homogene Differentialgleichung erster Ordnung $y' = p(x)y$ des vorhergehenden Abschnitts.

Es stellt sich nun die Frage ob durch die Linearkombination

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

alle Lösungen der Differentialgleichung gefunden werden. Es gilt das folgende: Die allgemeine Lösung der Gleichung $y''+py'+qy = 0$ ist als Linearkombination $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ darstellbar, falls $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängige Lösungen sind. Die beiden Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ heissen in diesem Fall *Basislösungen* oder *Fundamentallösungen* der Differentialgleichung.

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit für zwei Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ ist folgendermassen definiert ist: Zwei gegebene Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ sind linear unabhängig, falls die Gleichung

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0,$$

welche für alle x gelten muss (Achtung: Dies ist keine Gleichung für x sondern für die Konstanten C_1, C_2), nur die Lösung $C_1 = C_2 = 0$ besitzt (die Definition ist analog zur Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren). Wir illustrieren den Begriff am Beispiel der Funktionen $y_1(x) = \cos(\omega_0 x)$, $y_2(x) = \sin(\omega_0 x)$. Die Gleichung lautet

$$C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x) = 0.$$

Da die Gleichung für alle x gelten muss, können beliebige Werte für x eingesetzt werden um die Gleichung zu untersuchen. Wir setzen $x = 0$ und erhalten $C_1 = 0$. Die Gleichung reduziert sich auf $C_2 \sin(\omega_0 x) = 0$ deren einzige Lösung $C_2 = 0$ ist. Ein Gegenbeispiel sind die Funktionen $y_1(x) = 3\sin(\omega_0 x)$, $y_2(x) = 7\cos(\omega_0 x)$. Die Gleichung der Linearkombination ist

$$C_1 3 \sin(\omega_0 x) + C_2 7 \sin(\omega_0 x) = 0.$$

Eine Lösung davon ist beispielsweise $C_1 = -\frac{7}{3}$, $C_2 = 1$. Diese Funktionen sind somit nicht linear unabhängig.

1.6.4. *Aufsuchen der Basislösungen und allgemeine Lösung.* Wir suchen die allgemeine Lösung der Gleichung $y'' + py' + qy = 0$. Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ ergibt

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) e^{\lambda x} = 0,$$

i.e.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Somit ist $y(x) = e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung wenn λ eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms* $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ ist. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

und somit sind die drei Fälle

$$\text{(i)} \quad p^2 - 4q > 0, \qquad \text{(ii)} \quad p^2 - 4q = 0, \qquad \text{(iii)} \quad p^2 - 4q < 0$$

zu unterscheiden. Bemerkung: Wir lassen für λ Werte in den komplexen Zahlen zu. Durch die Werte von λ in den drei Fällen ergeben sich nun folgendermassen die zugehörigen Basislösungen:

(i) $p^2 - 4q > 0$: Diesen Fall nennt man *starke Dämpfung.* Es gilt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Somit sind die beiden Basislösungen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

(ii) $p^2 - 4q = 0$: Diesen Fall nennt man *Kritische Dämpfung.* Es gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = -p/2 \in \mathbb{R}$. Somit ist $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ eine Basislösung. Man kann zeigen (als Übung) dass im Fall kritischer Dämpfung die Funktion $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ auch eine Lösung der Differentialgleichung ist und die Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ linear unabhängig sind. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda_1 x}, \qquad \lambda_1 = -\frac{p}{2}.$$

(iii) $p^2 - 4q < 0$: Diesen Fall nennt man *schwache Dämpfung.* Es gilt $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, i.e. $\lambda_1 = \alpha + j\beta$, $\lambda_2 = \alpha - j\beta$, wobei $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{4q - p^2}/2$ und Basislösungen sind

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x) &= e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + j\sin(\beta x)), \\ \tilde{y}_1(x) &= e^{(\alpha - j\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - j\sin(\beta x)). \end{aligned}$$

Um reelle Basislösungen zu erhalten verwenden wir die folgenden Linearkombinationen davon:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)}{2} = e^{\alpha x}\cos(x), \\ y_2(x) &= \frac{\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)}{2j} = e^{\alpha x}\sin(x) \end{aligned}$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = e^{\alpha x}\Big(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\Big), \qquad \alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Bemerkungen:

(i) Es lässt sich prüfen dass die beiden Basislösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ linear unabhängige Funktionen sind.

(ii) Die erhaltene allgemeine Lösung im Fall der schwachen Dämpfung lässt sich umschreiben auf die Form

$$y(x) = Ce^{\alpha x} \cos(\beta x + \phi).$$

1.6.5. *Diskussion der Lösungen.* In Verbindung mit dem mechanischen Feder-Masse-Dämpfungssystem diskutieren wir nun die erhaltenen allgemeinen Lösungen. Zur Vereinfachung führen wir die beiden Grössen

$$\Delta = \frac{\delta}{2m}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ein. Die Differentialgleichung mit den zugehörigen Lösungen des charakteristischen Polynoms ist nun

$$y'' + 2\Delta y' + \omega_0^2 y = 0, \qquad \lambda_{1,2} = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \omega_0^2}.$$

(i) Starke Dämpfung. Übertragen auf das mechanische System wird die Bedingung $p^2 - 4q > 0$ zu

$$\Delta > \omega_0.$$

Die allgemeine Lösung für die Auslenkung $y(t)$ lautet

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Wegen $\Delta^2 - \omega_0^2 < \Delta^2$, folgt dass $\lambda_{1,2} < 0$. Somit ist die Auslenkung im Fall starker Dämpfung exponentiell fallend.

(ii) Kritische Dämpfung. Übertragen auf das mechanische System wird die Bedingung $p^2 - 4q = 0$ zu

$$\Delta = \omega_0.$$

Die allgemeine Lösung für die Auslenkung $y(t)$ lautet

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\Delta t}.$$

Auch im Fall kritischer Dämpfung fällt die Auslenkung exponentiell ab.

(iii) Schwache Dämpfung. Übertragen auf das mechanische System wird die Bedingung $p^2 - 4q < 0$ zu

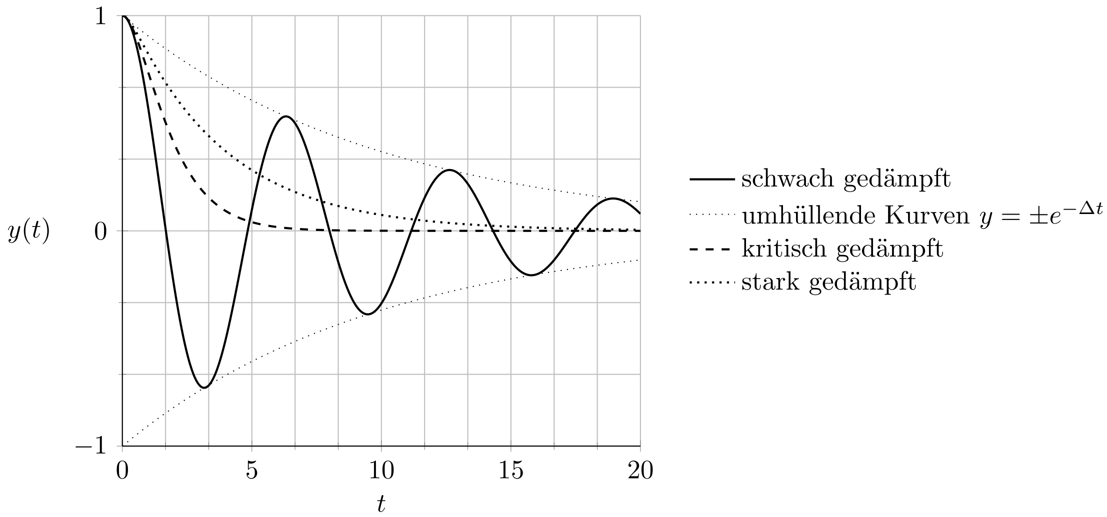
$$\Delta < \omega_0.$$

Die allgemeine Lösung für die Auslenkung $y(t)$ lautet

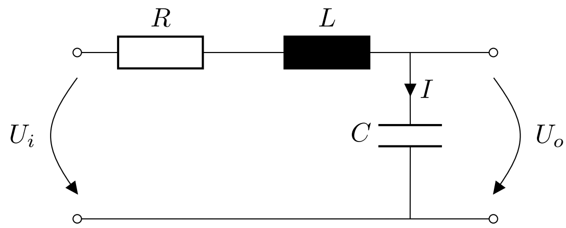
$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\Delta t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \\ &= Ce^{-\Delta t} \cos(\beta t + \phi), \qquad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}. \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine gedämpfte Schwingung (die Amplitude nimmt mit der Zeit exponentiell ab). Ein Spezialfall tritt auf wenn keine Reibung vorhanden ist: $\delta = 0$ führt auf $\Delta = 0$ und die Schwingung ist ungedämpft (Amplitude bleibt konstant), die auftretende Frequenz ist ω_0. Aus diesem Grund nennt man ω_0 auch die *Eigenfrequenz* des Systems.

Die folgende Grafik stellt die drei Fälle gegenüber. Es wurden die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ gewählt. Diese Anfangsbedingungen entsprechen dem loslassen der Masse m bei Auslenkung gleich Eins. Die drei Lösungen entsprechen Systemen mit der selben Masse und der selben Federkonstanten. Lediglich der Reibungskoeffizient ist unterschiedlich gewählt. Die Umhüllenden Kurven $y(t) = \pm e^{-\Delta t}$ der Schwingungslösung (schwache Dämpfung) sind fein und gepunktet eingezeichnet und geben die Abnahme der Amplitude wieder. Gestrichelt eingezeichnet ist das System mit kritischer Dämpfung, gepunktet ein System mit starker Dämpfung. Es ist ersichtlich dass das stark gedämpfte System langsamer in die Ruhelage zurückkehrt als das kritisch gedämpfte.



1.6.6. *Analogie zu elektrischen Systemen.* Wir betrachten die folgende Schaltung mit einem Ohmschen Widerstand R, einer Spule L und einem Kondensator C:



Wir bezeichnen mit U_i, U_o die Eingangs- respektive die Ausgangsspannung dieser Schaltung. Der Maschensatz für die Spannungen ergibt

$$U_i = U_R + U_L + U_o.$$

Es gelten die folgenden Gesetze für die Spannung über den Ohmschen Widerstand und die Spule:

$$U_R = RI = RQ', \qquad U_L = LI' = L\ddot{Q},$$

wobei wir mit Q die Ladung auf dem Kondensator bezeichnen. Diese eingesetzt in der obigen Gleichung ergeben

$$\begin{aligned} U_i &= RQ' + LQ'' + U_o \\ &= RCU_o' + LCU_o'' + U_o, \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile das folgende Gesetz für die Spannung über den Kondensator (und die Ableitungen davon) verwendet haben:

$$CU_o = Q, \qquad CU_o' = Q', \qquad CU_o'' = Q''.$$

Die Differentialgleichung umgestellt und die Eingangsspannung $U_i = 0$ gesetzt (die Verbindungen des Eingangs kurzgeschlossen), ergibt die folgende Differentialgleichung für die Kondensatorspannung U_o:

$$U_o'' + \frac{R}{L}U_o' + \frac{1}{LC}U_0 = 0.$$

Bemerkung: Aus dieser Differentialgleichung kann durch Ableiten und Verwenden von $CU_o' = Q' = I$ die Differentialgleichung für den Strom I:

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = 0$$

gefunden werden.

Die beiden Differentialgleichungen für $U_o(t)$ oder $I(t)$ sind lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, i.e. die Gleichungen sind von der selben Form wie die Gleichung welche das mechanische Feder-Masse-Dämpfungssystem beschreibt:

$$y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Wir stellen die Grössen, welche einander in diesen Systemen analog sind, in der folgenden Tabelle gegenüber (man vergleiche die entsprechenden Differentialgleichungen):

Mechanisch	Elektrisch
Auslenkung $y(t)$	Spannung $U_o(t)$, Stromstärke $I(t)$
Masse m	Induktion L
Reibungskoeffizient δ	Widerstand R
Federkonstante k	1/Kapazität $1/C$

Zum Beispiel entspricht der Masse m, welche im mechanischen System die Trägheit beschreibt, im elektrischen System die Induktivität L. Da nun beide Systeme mathematisch gleich beschrieben werden, können Erkenntnisse über die Lösung eines Systems direkt auf das andere System übertragen werden.

Beispiel: In einem mechanischen System ohne Reibung ($\delta = 0$) ist die Frequenz der Schwingung $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Somit schwingt die Spannung/der Strom in einem elektrischen Schaltkreis ohne Ohmschen Widerstand ($R = 0$) mit der Frequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

1.6.7. *Inhomogene Gleichung.* Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zusätzlich besitzt die Gleichung auf der rechten Seite eine Störfunktion $r(x)$, i.e. wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$y'' + py' + qy = r(x).$$

Im mechanischen Feder-Masse-Dämpfungssystem entspricht die Störfunktion $r(x)$ einer äusseren, zeitabhängigen Kraft welche auf die Masse wirkt. In diesem (und dem analogen elektrischen) Zusammenhang nennt man $r(x)$ auch *Anregung*.

Im folgenden werden wir die Notation

$$Ly = y'' + py' + qy$$

benutzen. Die betrachtete inhomogene Gleichung und die dazugehörige homogene Gleichung lauten in dieser Notation

$$Ly = r(x), \qquad Ly = 0.$$

Es gilt das folgende:

Theorem 1.2.

(i) *Sei $y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $Ly = 0$ (wobei $y_1(x)$, $y_2(x)$ die Basislösungen sind) und sei $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung $Ly = r(x)$. Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $Ly = r(x)$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_i(x). \end{aligned}$$

I.e. die allgemeine Lösung ist gegeben durch die Superposition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer Lösung der inhomogenen Gleichung.

(ii) *Sei $y_1(x)$ eine Lösung der Gleichung $Ly = r_1(x)$ und sei $y_2(x)$ eine Lösung der Gleichung $Ly = r_2(x)$. Dann ist $y_1(x) + y_2(x)$ eine Lösung von $Ly = r_1(x) + r_2(x)$.*

Die Aussage (und auch der Beweis) des ersten Teils ist analog zur linearen Differentialgleichung erster Ordnung. Auch hier benötigen wir somit für die allgemeine Lösung eine Lösung der inhomogenen Gleichung (die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung wurde in den vorhergehenden Teilabschnitten besprochen).

Im Fall der linearen Gleichung erster Ordnung wurde die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten gefunden. Im vorliegenden Fall ist das Vorgehen das fogende:

(i) In Abhängigkeit der Form von $r(x)$ macht man einen der folgenden Ansätze für $y_i(x)$:

Form von $r(x)$	Ansatz für $y_i(x)$
$ae^{\beta x}$	$Ae^{\beta x}$
$a\cos(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$
$a\sin(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$
x^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0$

Wobei A, B, A_n, A_{n-1}, $\ldots$, A_0 (unbekannte) Konstanten sind.

(ii) Der Ansatz wird in die Gleichung $y'' + py' + qy = r(x)$ eingesetzt und die Konstanten werden bestimmt. Führt der Ansatz auf

$$y_i'' + py_i' + qy_i = 0,$$

(i.e. der Ansatz ist eine Lösung der homogenen Gleichung), so ist der Ansatz mit x zu multiplizieren.

Wir illustrieren an Beispielen (die Beispiele beinhalten jeweils auch die Lösung der homogenen Gleichung):

(i) Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5x}.$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$y_i(x) = Ae^{5x}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$(25A - 20A - 12A)e^{5x} = 3e^{5x},$$

i.e. $A = -\frac{3}{7}$ und die Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y_i(x) = -\frac{3}{7}e^{5x}.$$

Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$y'' - 4y' - 12y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 12$, die Nullstellen davon sind $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$ und somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{6x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{6x} - \frac{3}{7}e^{5x}. \end{aligned}$$

(ii) Wie suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' + 3y' + 2y = x^2.$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$y_i(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

i.e.

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C = x^2.$$

Koeffizientenvergleich ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2: && 2A &= 1, \\ x^1: && 6A + 2B &= 0, \\ x^0: && 2A + 3B + 2C &= 0. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{3}{2}, \qquad C = \frac{7}{4},$$

i.e.

$$y_i(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, die Nullstellen davon sind $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ und somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

(iii) Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$y_i(x) = Ae^{-x}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$(A - 3A + 2A)e^{-x} = e^{-x}.$$

Die linke Seite verschwindet jedoch, i.e. der Ansatz $y_i(x) = Ae^{-x}$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Wir multiplizieren den Ansatz mit x und bekommen den neuen Ansatz

$$y_i(x) = Axe^{-x}.$$

Die Ableitungen davon sind

$$y_i'(x) = A(1-x)e^{-x}, \qquad y_i''(x) = A(x-2)e^{-x}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$A(x - 2 + 3(1-x) + 2x)e^{-x} = e^{-x},$$

i.e.

$$Ae^{-x} = e^{-x}.$$

Somit folgt $A = 1$ und

$$y_i(x) = xe^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Gleichung lautet (siehe vorhergehendes Beispiel)

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + xe^{-x}. \end{aligned}$$

1.6.8. *Inhomogenes Feder-Masse-Dämpfungssystem.* Wir betrachten das Feder-Masse-Dämpfungssystem mit einer zusätzlich auf die Masse wirkenden Kraft welche periodisch mit einer Kreisfrequenz ω wirkt. I.e. wir betrachten die Gleichung

$$y'' + 2\Delta y' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t).$$

(Zur Erinnerung: $\Delta = \delta/(2m)$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, wobei δ der Reibungskoeffizient, m die Masse und k die Federkonstante ist). Wir nehmen an wir befinden uns im Fall schwacher Dämpfung, i.e. es gelte $\Delta^2 - \omega_0^2 < 0$. Hinweis: F_0 besitzt die Dimension einer Kraft pro Masse, i.e. die Amplitude der wirkenden Kraft ist $F_0 m$.

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\Delta\lambda + \omega_0^2$. Die Nullstellen davon sind $\lambda_\pm = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \omega_0^2} = -\Delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = e^{-\Delta t}\left(C_1 \cos(\tilde{\omega} t) + C_2 \sin(\tilde{\omega} t)\right),$$

wobei

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}.$$

Da $r(t) = F_0 \cos(\omega t)$, machen wir zur Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz

$$y_i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Wir haben

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t), \\ y_i''(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Eingesetzt in der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} &\cos(\omega t)\left(-A\omega^2 + 2\Delta B\omega + \omega_0^2 A\right) \\ &+ \sin(\omega t)\left(-B\omega^2 - 2\Delta A\omega + \omega_0^2 B\right) = F_0 \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Setzen von $t = 0$ ergibt

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\Delta B\omega = F_0,$$

setzen von $t = \frac{\pi}{2}$ ergibt

$$-2\Delta A\omega + B(\omega_0^2 - \omega^2) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem für A und B. Auflösen ergibt

$$A = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2}, \qquad B = \frac{2F_0\Delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2}.$$

Somit ist $y_i(t)$ gegeben durch

$$y_i(t) = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{2F_0\Delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2}\sin(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung zerfällt exponentiell und somit ist für grosse Zeiten nur die obige inhomogene Lösung relevant. Zur weiteren Betrachtung verwenden wir die Form

$$y_i(t) = C\cos(\omega t + \phi),$$

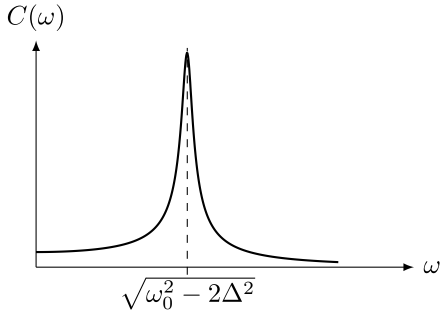
wobei

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \tan(\phi) = -\frac{B}{A}.$$

Die Diskussion der Phase ϕ lassen wir weg und betrachten nur die Amplitude

$$C = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta^2\omega^2}}.$$

Bei einem gegebenen System (i.e. Masse, Feder und Reibungskoeffizient vorgegeben) ergibt sich in Abhängigkeit von der Frequenz ω der Anregungskraft das folgende *Resonanzverhalten* (siehe Übung):



Die Funktion $C(\omega)$ wird auch *Amplitudenfreqenzgang* genannt.

1.7. **Mathematische Modellierung.**

1.7.1. *Allgemein.* In diesem Teilabschnitt betrachten wir die Übersetzung einer durch einen Text gegebenen Gesetzmässigkeit in eine Differentialgleichung. Wir illustrieren an zwei Beispielen:

(i) *Lernkurve:* Sei $N(t)$ das Produktivitätsniveau eines Mitarbeiters zur Zeit t. Sei $N_{\max}$ das maximal erreichbare Niveau und es gelte folgendes: Die Lerngeschwindigkeit ist proportional zur Differenz zwischen aktuellem und maximal möglichem Niveau.

Die Lerngeschwindigkeit entspricht der Ableitung des Produktivitätsniveaus nach der Zeit, i.e. die Lerngeschwindigkeit ist dN/dt. Proportionalitäten werden mathematisch beschrieben als lineare Funktionen ohne y-Achsenabschnitt. I.e. Für y proportional zu x gilt $y = C \cdot x$, wobei C die Proportionalitätskonstante ist. Somit ergibt sich aus dem obigen Text die Differentialgleichung:

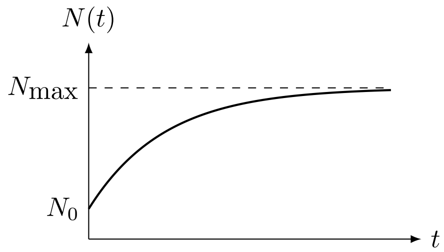
$$\frac{dN}{dt}(t) = k(N_{\max} - N(t)),$$

wobei wir mit k die Proportionalitätskonstante bezeichnen. Diese Differentialgleichung ist separierbar und wir erhalten

$$N(t) = N_{\max} - Ce^{-kt}.$$

Mit einem Anfangsproduktivitätsniveau von $N(0) = N_0$ ergibt sich

$$N(t) = N_{\max} - (N_{\max} - N_0)e^{-kt}.$$



(ii) *Logistisches Wachstum:* Sei $N(t)$ die Grösse einer Population und es gelte:
   (a) $0 \leq N(t) \leq 1$, i.e. die Population ist nach oben durch 1 beschränkt,
   (b) das Wachstum ist proportional zur Population und
   (c) das Wachstum ist proportional zur verbleibenden möglichen Populationsdifferenz.

In dieser Situation ist das Wachstum dN/dt proportional zu zwei unterschiedlichen Grössen. In der mathematischen Modellierung muss somit das Wachstum proportional zum Produkt der beiden Grössen sein[3]. Wir finden somit die Differentialgleichung

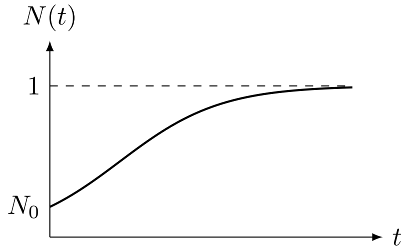
$$\frac{dN}{dt}(t) = N(t)(1 - N(t)),$$

wobei wir eine mögliche auftretende Proportionalitätskonstante gleich eins gesetzt haben. Auch diese Gleichung ist separierbar und wir erhalten

$$N(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}.$$

Mit einer Anfangspopulation von $N(0) = N_0$ folgt

$$N(t) = \frac{N_0}{(1 - N_0)e^{-t} + N_0}.$$



1.7.2. *Mechanische Systeme.* Die Translationsbewegung eines Körpers, auf welchen eine Kraft $\vec{F}$ ausgeübt wird, wird beschrieben durch das Newtonsche Gesetz der Dynamik:

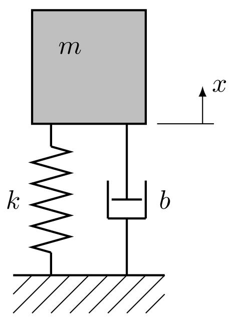
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p},$$

wobei wir mit $\vec{p}$ den Impuls des Körpers bezeichnen. I.e. wir haben $\vec{p} = m\vec{v}$, wobei wir mit $\vec{v}$ die Geschwindigkeit und mit m die Masse des Körpers bezeichnen. Für einen Körper mit konstanter Masse m reduziert sich diese Gleichung auf

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

wobei wir mit $\vec{a}$ die Beschleunigung des Körpers bezeichnen, i.e. $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$.

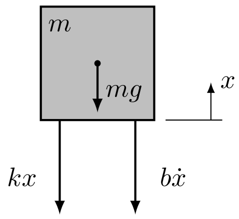
Als Beispiel betrachten wir die vertikale Bewegung einer Masse m, welche durch eine Feder mit Federkonstanten k und einen Dämpfer mit Dämpfungskonstante b mit dem festen Untergrund verbunden ist:



Es handelt sich um ein eindimensionales mechanisches Problem mit konstanter Masse m. Wir bezeichnen mit x die Auslenkung nach oben aus der vertikalen Lage, in welcher die Feder ungespannt ist (mechanisch entspricht dies der Lage in welcher das System während der Montage fixiert wird). Für die Bestimmung der Summe der wirkenden

[3]Physikalisches Beispiel: Die Masse m eines Körpers ist proportional zu seinem Volumen V und seiner Dichte ρ, i.e. $m = V\rho$

Kräfte schneiden wir den Körper frei:



Für die eingezeichneten Kräfte wählen wir eine Richtung und tragen die wirkende Kraft in diese Richtung bei einer kleinen positiven Auslenkung x ein. Zum Beispiel führt eine kleine positive Auslenkung x zu einer gestreckten Feder. Somit wirkt auf den Körper an der Befestigungsstelle der Feder eine Zugkraft der Grösse xk nach unten. Mit der obigen gewählten Richtung der Federkraft (nach unten) ist diese Kraft somit kx. Analog erhalten wir die Reibungskraft, ausgeübt vom Dämpfer auf die Masse von $b\dot{x}$. Zusammen mit der Gravitationskraft mg wird die Gleichung $F = ma$ zu

$$-kx - b\dot{x} - mg = m\ddot{x}.$$

Hier erhalten wir die Minuszeichen vor den Kräften, da wir die positive x-Richtung nach oben gewählt haben. Umgestellt:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + mg = 0.$$

Nun betrachten wir die Ruhelage $x = x_0$ gegeben durch $\ddot{x} = \dot{x} = 0$. Die Gleichung vereinfacht sich zu

$$kx_0 + mg = 0.$$

Es folgt

$$x_0 = -\frac{mg}{k}.$$

Wir führen die neue Koordinate $\tilde{x} = x - x_0$ ein. I.e. $\tilde{x}$ beschreibt die Auslenkung aus der Ruhelage. Es folgt $x = \tilde{x} + x_0$ und $\dot{x} = \dot{\tilde{x}}$, $\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}}$. Die obige Differentialgleichung wird zu

$$m\ddot{\tilde{x}} + b\dot{\tilde{x}} + k(\tilde{x} + x_0) + mg = 0.$$

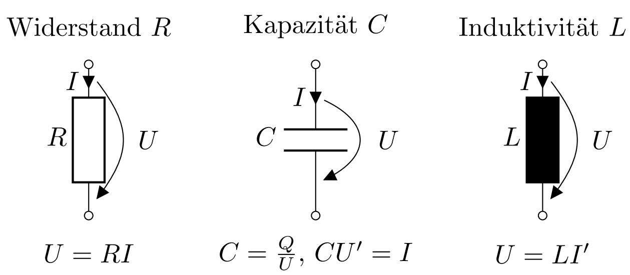
Zusammen mit dem obigen Ausdruck für x_0 reduziert sich dies auf

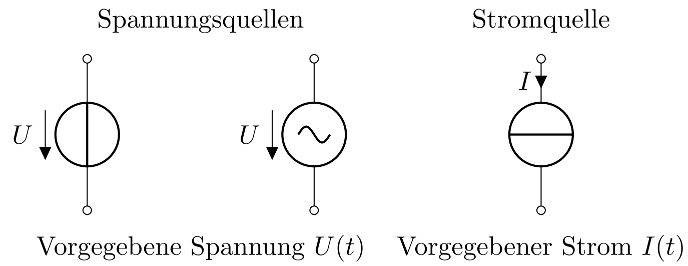
$$m\ddot{\tilde{x}} + b\dot{\tilde{x}} + k\tilde{x} = 0.$$

Dies entspricht der Differentialgleichung der horizontalen Bewegung einer Masse mit Feder und Dämpfung. Somit machen wir die folgende wichtige Beobachtung: Man kann die Gravitation beim Aufstellen der dynamischen Gleichungen vernachlässigen, wenn man direkt die Auslenkung aus der Ruhelage betrachtet. I.e. für $x =$Auslenkung aus der Ruhelage ergibt sich für das obige System die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

1.7.3. *Elektrische Systeme.* Wir haben die folgenden Grundelemente und dazugehörigen mathematischen Beschreibungen:



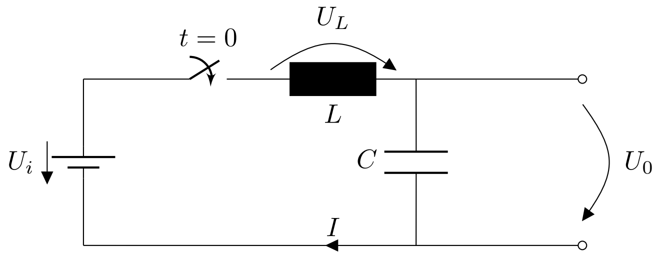


Die Grundgesetze der Beschreibung elektrischer Netzwerke sind die Kirchhoffeschen Gesetze:

(i) *Maschensatz:* Alle Teilspannungen einer Masche in einem elektrischen Netzwerk addieren sich zu null.

(ii) *Knotensatz:* In einem Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerkes ist die Summe der zufliessenden Ströme gleich der Summe der abfliessenden Ströme.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir das folgende LC-Glied:



Die Batterie liefert die konstante Spannung U_i und wir interessieren uns für die Spannung über dem Kondensator U_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter geschlossen. Weiter befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ keine Ladung auf den Kondensatorplatten und es fliesse auch kein Strom, i.e. $I(0) = 0$. Aus dem Maschensatz ergibt sich

$$U_i = U_L + U_0.$$

Mit $U_L = LI'$, $U_0 = Q/C$ folgt

$$U_i = LI' + \frac{Q}{C}.$$

Ableiten nach der Zeit (mit $I = dQ/dt$) ergibt

$$I'' = -\frac{1}{LC}I.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$I(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right).$$

Die Anfangsbedingung $Q(0) = 0$ ergibt dass am Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ auch keine Spannung anliegt, i.e. $U_0(0) = 0$. Aus $U_i = U_L + U_0$ folgt dass $U_L(0) = U_i$. Somit haben wir

$$I'(0) = \frac{U_L(0)}{L} = \frac{U_i}{L}.$$

Aus dieser Anfangsbedingung ergibt sich die zweite Konstante zu

$$C_2 = U_i\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Aus der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt sich die erste Konstante zu

$$C_1 = 0.$$

Somit ist die partikuläre Lösung

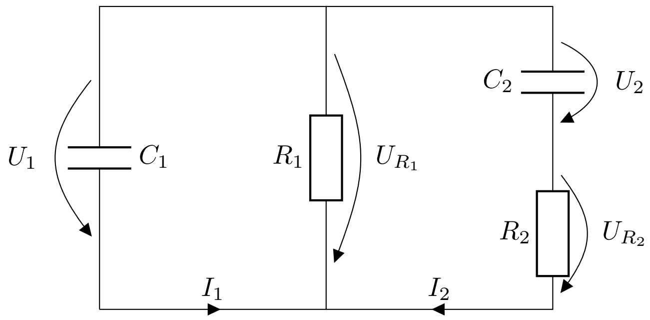
$$I(t) = U_i\sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right).$$

Die Spannung am Kondensator $U_0(t)$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} U_0(t) &= U_i - U_L \\ &= U_i - LI' \\ &= U_i \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right)\right). \end{aligned}$$

1.8. **Systeme von Differentiagleichungen.**

1.8.1. *Einführendes Beispiel.* Wir betrachten den folgenden Schaltkreis:



Der Maschensatz angewendet auf die rechte Masche ist $U_2 + U_{R_2} = U_{R_1}$, der Maschensatz angewendet auf die linke Masche ist $U_1 = U_{R_1}$. Mit $U_{R_1} = -R_1(I_1 + I_2)$ und $U_{R_2} = R_2 I_2$ ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Ströme durch die beiden Kondensatoren in Abhängigkeit der Spannungen:

$$\begin{cases} I_1 = -\dfrac{1}{R_1}U_1 + \dfrac{1}{R_2}(U_2 - U_1), \\ I_2 = \dfrac{1}{R_2}(U_1 - U_2). \end{cases}$$

Für einen Kondensator der Kapazität C gilt $U = \frac{Q}{C}$. Die Ableitung nach der Zeit ergibt $U' = \frac{Q'}{C} = \frac{I}{C}$ und somit gilt für den Strom $I = CU'$. Eingesetzt für die linken Seiten im obigen Gleichungssystem ergibt das folgende System von Differentialgleichungen für die Spannungen an den Kondensatoren:

$$\begin{cases} U_1' = -\dfrac{1}{R_1C_1}U_1 + \dfrac{1}{R_2C_1}(U_2 - U_1), \\ U_2' = \dfrac{1}{R_2C_2}(U_1 - U_2). \end{cases}$$

1.8.2. *Matrixschreibweise.* Ein lineares, homogenes Gleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases}$$

Mit

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

lässt sich das Gleichungssystem schreiben als

$$\overrightarrow{y}'(x) = A\overrightarrow{y}(x).$$

Diese Schreibweise heisst *Matrixschreibweise*, die Matrix A heisst *Koeffizientenmatrix*. Die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen ist somit eine Vektorwertige Funktion $\overrightarrow{y}(x)$.

Für das einführende Beispiel der Kondensatorspannungen mit $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C_1 = 1$ und $C_2 = 1/2$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} U_1' = -U_1 + \frac{1}{2}(U_2 - U_1), \\ U_2' = (U_1 - U_2). \end{cases}$$

In Matrixschreibweise

$$\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U},$$

wobei

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.8.3. *Superpositionsprinzip.* Wir zeigen das Superpositionsprinzip für Systeme von Differentialgleichungen. Wir betrachten die Gleichung $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$. Seien $\overrightarrow{y}_1(x)$ und $\overrightarrow{y}_2(x)$ Lösungen dieser Gleichung. Dann ist auch die Linearkombination $\mu\overrightarrow{y}_1(x) + \mu\overrightarrow{y}_2(x)$ eine Lösung, wobei μ, ν Konstanten sind. Dies nennt man das *Superpositionsprinzip.* Beweis: Wir setzen die Superposition in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(\mu\overrightarrow{y}_1(x) + \mu\overrightarrow{y}_2(x)\Big) &= \frac{d}{dx}\Big(\mu\overrightarrow{y}_1(x)\Big) + \frac{d}{dx}\Big(\nu\overrightarrow{y}_2(x)\Big) \\ &= \mu\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}_1(x) + \nu\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}_2(x) \\ &= \mu A\overrightarrow{y}_1(x) + \nu A\overrightarrow{y}_2(x) \\ &= A\Big(\mu\overrightarrow{y}_1(x) + \nu\overrightarrow{y}_2(x)\Big), \end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile verwendet haben dass $\overrightarrow{y}_1(x)$, $\overrightarrow{y}_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung sind.

1.8.4. *Entkoppeltes System.* Ein System von Differentialgleichungen, welches in der Form $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ mit A eine Diagonalmatrix geschrieben werden kann, heisst *entkoppeltes* System. Als Beispiel betrachten wir

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \qquad \text{wobei} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Als Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1, \\ y_2' = -5y_2. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen können unabhängig voneinander gelöst werden, i.e. das System ist enkoppelt. Wir haben

$$y_1 = C_1e^{3x}, \qquad y_2 = C_2e^{-5x}.$$

In Vektorform

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} C_1e^{3x} \\ C_2e^{-5x} \end{pmatrix},$$

oder

$$\overrightarrow{y}(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{3x} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-5x}.$$

1.8.5. *Allgemeiner Fall.* Wir betrachten $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ und machen für die Lösung den Ansatz

$$\overrightarrow{y}(x) = \overrightarrow{v}e^{\lambda x}.$$

Eingesetzt in der Gleichung $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ ergibt

$$\lambda\overrightarrow{v}e^{\lambda x} = A\overrightarrow{v}e^{\lambda x},$$

i.e.

$$\lambda \vec{v} = A\vec{v}.$$

Somit ist $\vec{y} = \vec{v}e^{\lambda x}$ eine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$, genau dann wenn $\vec{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ ist.

Für eine konkrete Rechnung betrachten wir wieder das einführende Beispiel der Kondensatorspannungen mit $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C_1 = 1$ und $C_2 = 1/2$. Das Gleichungssystem ist $\vec{U}' = A\vec{U}$, wobei

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind gegeben durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, i.e durch (wir bezeichnen mit $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix)

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 1 \overset{!}{=} 0.$$

Es folgt $\lambda_+ = -1/2$, $\lambda_- = -2$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind Lösungen der linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_\pm\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$. Wir wählen von den Lösungen jeweils einen Eigenvektor aus:

$$\vec{f}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I.e. wir finden die Lösungen

$$\vec{U}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}x}, \qquad \vec{U}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Wie oben gezeigt ist nun eine Linearkombination dieser Lösungen auch eine Lösung, i.e. die vektorwertige Funktion

$$\vec{U}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

ist auch eine Lösung. Diese Lösung beinhaltet zwei Konstanten. Da wir ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung betrachten erwarten wir eine allgemeine Lösung mit zwei Konstanten. In der Tat ist die vorangehende Funktion $\vec{U}(x)$ die allgemeine Lösung von $\vec{U}' = A\vec{U}$.

Werden für ein Gleichungssystem auch Anfangsbedingungen vorgegeben, so ergibt sich durch diese Bedingungen ein Gleichungssystem für die auftretenden Konstanten in der allgemeinen Lösung. Beispielsweise sei für das obige Gleichungssystem der Kondensatoren gefordert dass die Spannungen zum Anfangszeitpunkt gegeben sind als

$$U_1(0) = 5, \qquad U_2(0) = 4.$$

In Vektorschreibweise:

$$\vec{U}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in die allgemeine Lösung

$$\vec{U}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5, \\ 2C_1 - C_2 = 4 \end{cases}$$

mit Lösung $C_1 = 3$, $C_2 = 2$. Somit lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$\vec{U}(x) = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

1.8.6. *Transformation von Gleichungen auf ein System erster Ordnung.* Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung kann auf ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung transformiert werden. Wir illustrieren das Vorgehen an zwei Beispielen:

(i) Wir betrachten die Differentialgleichung des Feder-Masse-Systems (ohne Reibung). Diese ist $my'' + ky = 0$. Mit $q = k/m$:
$$y'' + qy = 0.$$
Wir definieren Funktionen y_1, y_2 als
$$y_1 = y, \qquad y_2 = y'.$$
Für diese neuen Funktionen gilt
$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2, \\ y_2' &= y'' = -qy = -qy_1, \end{aligned}$$
wobei wir für die zweitletzte Gleichung die Differentialgleichung verwendet haben. Somit erfüllen die Funktionen y_1, y_2 das Gleichungssystem
$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -qy_1. \end{cases}$$
In Matrixschreibweise geschrieben ist dies $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$, wobei
$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir betrachten die Differentialgleichung
$$y''' - 2y'' + 3y' - 4y = 0.$$
Wir definieren Funktionen y_1, y_2, y_3 als
$$y_1 = y, \qquad y_2 = y', \qquad y_3 = y''.$$
Für die Funktionen y_1, y_2, y_3 gilt
$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2, \\ y_2' &= y'' = y_3, \\ y_3' &= y''' = 2y'' - 3y' + 4y = 2y_3 - 3y_2 + 4y_1, \end{aligned}$$
wobei wir für die zweitletzte Gleichung die Differentialgleichung verwendet haben. I.e die Funktionen y_1, y_2, y_3 erfüllen das System
$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = 2y_3 - 3y_2 + 4y_1. \end{cases}$$
In Matrixschreibweise ist dies $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$, wobei
$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.8.7. *Die Situation komplexer Eigenwerte.* Wir illustrieren den Fall komplexer Eigenwerte der Matrix A in $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ am Beispiel
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dies ist das Gleichungssystem welches das Feder-Masse-System (ohne Dämpfung) mit $k/m = q = 4$ beschreibt. Aus $\det(A - \lambda\mathbb{1}) \overset{!}{=} 0$ ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_\pm = \pm 2j$. Die Eigenvektoren sind Lösungen der linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_\pm \mathbb{1})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Für $\lambda_+ = 2j$ ist die dazugehörige erweiterte Matrix
$$\left(\begin{array}{cc|c} -2j & 1 & 0 \\ -4 & -2j & 0 \end{array}\right).$$

Die reduzierte Zeilenstufenform davon ist

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & j/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösung ist

$$\vec{v} = t\begin{pmatrix} -j \\ 2 \end{pmatrix},$$

mit einem Parameter t. Wir wählen den Eigenvektor

$$\vec{f}_+ = \begin{pmatrix} -j \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Analog wählen wir aus den Lösungen des Gleichungssystems $(A - \lambda_- \mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$ den Eigenvektor

$$\vec{f}_- = \begin{pmatrix} j \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\vec{y}(x) &= C_1\vec{f}_+ e^{\lambda_+ x} + C_2\vec{f}_- e^{\lambda_- x} \\
&= C_1\begin{pmatrix} -j \\ 2 \end{pmatrix} e^{2jx} + C_2\begin{pmatrix} j \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2jx} \\
&= C_1\begin{pmatrix} -j \\ 2 \end{pmatrix}\Big(\cos(2x) + j\sin(2x)\Big) + C_2\begin{pmatrix} j \\ 2 \end{pmatrix}\Big(\underbrace{\cos(-2x)}_{=\cos(2x)} + j\underbrace{\sin(-2x)}_{=-\sin(2x)}\Big).
\end{aligned}$$

Für eine reelle Lösung wählen wir $C_1 = a + jb$, $C_2 = a - jb$. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\vec{y}(x) = a\left(\cos(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \sin(2x)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + b\left(\cos(2x)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right).$$

Für die Beschreibung des Feder-Masse-Systems ist $y_1(x)$ die Auslenkung der Masse aus der Ruhelage. I.e. wir finden für die Auslenkung aus der Ruhelage

$$y_1(x) = 2a\sin(2x) + 2b\cos(2x).$$

Dies ist identisch mit dem Ergebnis der direkten Betrachtung der Differentialgleichung zweiter Ordnung, im Fall wo $\alpha = 0$, i.e. im Fall wo der Realteil der Nullstellen des charakteristischen Polynoms verschwindet (siehe Seite 16).

Allgemein gilt das folgende: Das System $\vec{y}' = A\vec{y}$ mit A einer $n \times n$-Matrix hat n linear unabhängige Lösungen

$$\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \ldots, \vec{y}_n(x).$$

Die allgemeine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$ lautet

$$\vec{y}(x) = C_1\vec{y}_1(x) + C_2\vec{y}_2(x) + \ldots + C_n\vec{y}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{y}_i(x).$$

Sind die Eigenwerte reell, i.e. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, und seien $\vec{u}_i$ die dazugehörigen Eigenvektoren, so sind

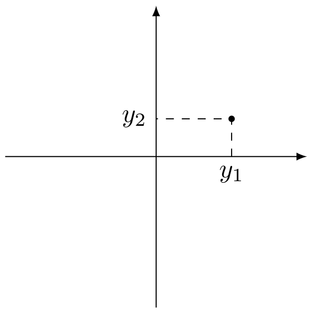
$$\vec{y}_i(x) = \vec{u}_i e^{\lambda_i x}$$

die linear unabhängigen Lösungen von $\vec{y}' = A\vec{y}$. Sind die Eigenwerte komplex und ohne verschwindenden Imaginärteil, i.e. $\lambda_{i\pm} = \alpha \pm j\beta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und seien $\vec{u} \pm j\vec{v}$ die zugehörigen Eigenvektoren, so sind

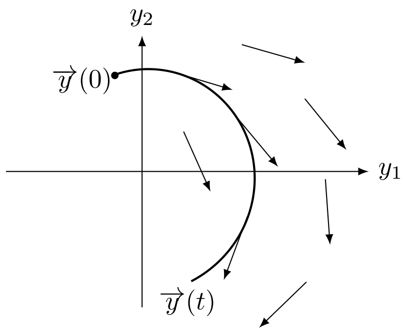
$$\begin{aligned}
\vec{y}_{i+}(x) &= e^{\alpha x}\Big(\cos(\beta x)\vec{u} - \sin(\beta x)\vec{v}\Big), \\
\vec{y}_{i-}(x) &= e^{\alpha x}\Big(\cos(\beta x)\vec{v} + \sin(\beta x)\vec{u}\Big)
\end{aligned}$$

linear unabhängige Lösungen von $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$.

1.8.8. *Phasenraum.* Allgemein heisst die Menge aller möglichen Zustände eines dynamischen Systems *Phasenraum.* Für ein Differentialgleichungssystem $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ ist ein Zustand gegeben durch einen Vektor $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Somit entspricht ein Zustand des Systems einem Punkt in der Ebene mit kartesischen Koordinaten (y_1, y_2):



Der Phasenraum für ein System von n Gleichungen erster Ordnung ist $\mathbb{R}^n$. Die zeitliche Entwicklung des Zustandes, gegeben durch eine partikuläre Lösung $\overrightarrow{y}(t)$ ergibt eine Kurve im Phasenraum. Das Vektorfeld $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ ist in jedem Punkt tangential an diese Kurve.



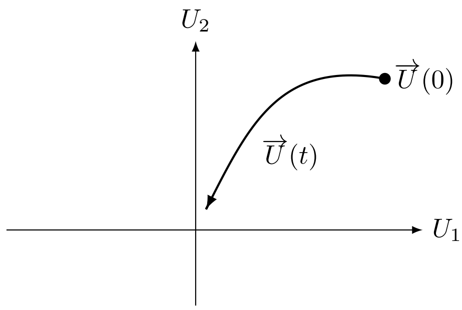
Als konkretes Beispiel betrachten wir ein weiteres Mal das Differentialgleichungssystem welches die Spannungen an zwei Kondensatoren beschreibt (siehe Beginn dieses Abschnitts). Das System ist $\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U}$, wobei

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

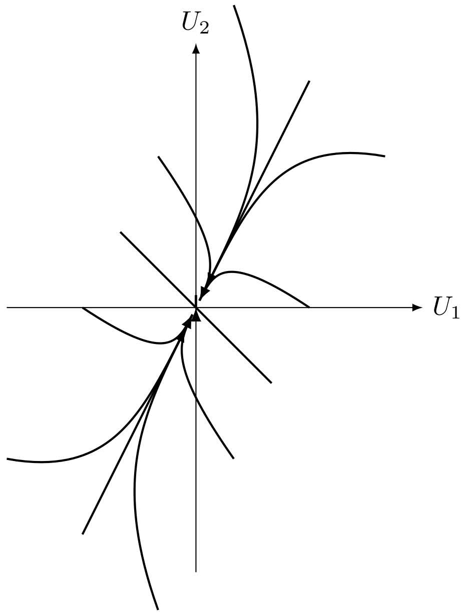
Die partikuläre Lösung zur Anfangsbedingung $\overrightarrow{U}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\overrightarrow{U}(x) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x}.$$

Die entsprechende Kurve im Phasenraum ist



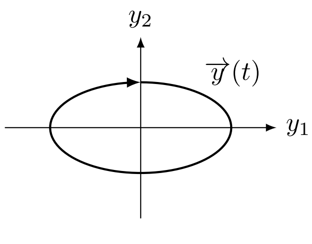
Werden andere Anfangsbedingungen $\overrightarrow{U}(0)$ verwendet, so ergeben sich folgende Typen von Kurven:



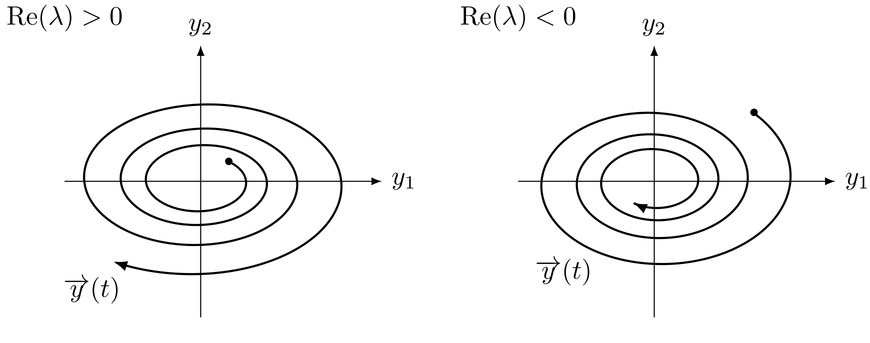
Den Kurven ist gemeinsam dass sie für $x \to \infty$ gegen den Ursprung konvergieren. Dies folgt direkt aus $\lambda_\pm < 0$. Der Ursprung $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$ entspricht einem *Fixpunkt* des Systems, i.e. einem Punkt im Phasenraum, in welchem $\overrightarrow{U}' = \overrightarrow{0}$ gilt. Physikalisch entspricht ein Fixpunkt eines dynamischen Systems einem Zustand, welches das System ohne Einwirkung von aussen nicht verlässt. Im Fall $\lambda_\pm < 0$ konvergiert die zeitliche Entwicklung gegen den Fixpunkt, man spricht von einem *Attraktor*, der Fixpunkt ist *stabil.*

Im Fall $\lambda_\pm > 0$ divergiert das zeitliche Verhalten des Systems für Anfangsbedingungen in der Nähe des Fixpunktes. Man spricht von einem *Repellor*, der Fixpunkt ist *instabil.* Im Fall $\lambda_+ > 0$, $\lambda_- < 0$ spricht man von einem *Sattelpunkt.* Auch dieser ist *instabil* (es existiert in diesem Fall eine Gerade durch den Ursprung (der Untervektorraum aufgespannt durch $\overrightarrow{f}_-$) welche, wenn als Anfangsbedingung verwendet, zu konvergierenden Lösungen führt. In der Praxis ist es jedoch nicht wahrscheinlich die Anfangsbedingungen genau auf dieser Geraden platzieren zu können).

Im Fall $\lambda_\pm \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ergeben sich oszillierende Lösungen. Die Kurven im Phasenraum sind geschlossen:



Für $\lambda_\pm \in \mathbb{C}$ ergibt sich ein kombinieres Verhalten:



Aufgabe 1. Man bestimme die Ordnung der folgenden Differentialgleichungen für $y(x)$.

(i) $y' = x$
(ii) $y' + y = x$
(iii) $y'' = y$
(iv) $y' = y^2$
(v) $y''' + 2y' = e^{-x}$
(vi) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = x$

Aufgabe 2. Man schreibe die folgenden Gleichungen in Form einer expliziten Differentialgleichung, i.e. in der Form

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

und gebe die Funktion G an.

(i) $yy' = x$
(ii) $x^2y' = y + x$
(iii) $y' + y = x$
(iv) $\frac{d}{dx}(xy) = x$
(v) $y'' - y' = 0$
(vi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = x$
(vii) $\frac{d}{dx}\left(\log(xy) + y + 17x\right) = 0$

Aufgabe 3. Man prüfe dass $y(x) = 1/(1-x)$ eine Lösung der Gleichung $y' = y^2$ ist.

Aufgabe 4. Man prüfe dass $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ eine Lösung der Gleichung $yy' + x = 0$ ist.

Aufgabe 5. Man gebe die allgemeine Lösung der Gleichung $xy' = 1$ an.

Aufgabe 6. Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen der Gleichung $y'' = 9y$?

(i) e^{3x}, (ii) e^{-3x}, (iii) $\sinh(3x)$, (iv) $\cosh(3x)$.

Hinweis:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Aufgabe 7. Man zeige dass $y(x) = xe^{-x}$ eine partikuläre Lösung der Gleichung $y'' + 2y' + y = 0$ ist.

Aufgabe 8. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^3y'(x)\left(y''(x)\right)^2 = x + y(x).$$

(i) Man bestimme die Ordnung dieser Differentialgleichung.
(ii) Man zeige dass $y(x) = x\log(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 9. Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = -17y^2.$$

Man zeige dass im Allgemeinen $y_1(x) + y_2(x)$ keine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 10. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0.$$

(i) Man zeige dass die folgenden Funktionen Lösungen dieser Differentialgleichungen sind (für $x > 0$):

$$y_0(x) = x^{-3/2}, \quad y_1(x) = x^{-1/2}, \quad y_2(x) = -9x^{-3/2}, \quad y_3(x) = 7x^{-1/2},$$
$$y_4(x) = -9x^{-3/2} + 7x^{-1/2}.$$

(ii) In Anbetracht dieser Lösungen finde man weitere Lösungen.
(iii) Man bestimme die eindeutige Lösung unter den Bedingungen

$$y(4) = 1/8, \qquad y'(4) = -3/64.$$

Aufgabe 11. Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = x + y.$$

(i) Man skizziere das Richtungsfeld im Bereich $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.
(ii) Man skizziere die Lösungskurve zu den Anfangsbedingungen $y(0) = -2, -1, 0$ im betrachteten Gebiet.
(iii) Man bestimme das Langzeitverhalten von Lösungen für $x \to \infty$ in Abhängigkeit von Anfangsbedingungen $y(0)$.

Aufgabe 12. Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y' = \sin(x).$$

(i) Man skizziere das Richtungsfeld im Gebiet $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [-2, 2]$.
(ii) Man bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung.
(iii) Man bestimme die partikuläre Lösung zu der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und skizziere diese im Richtungsfeld.

Aufgabe 13. Wir betrachten den freien Fall einer Masse $m = 10$ mit Anfangsgeschwindigkeit unter Einfluss des turbulenten Strömungswiderstandes in der Nähe der Marsoberfläche und interessieren uns für die Geschwindigkeit $v(t)$ dieser Masse. Der Strömungswiderstand ist proportional zu $v(t)^2$ und der Proportionalitätsfaktor sei -10 (negativ da entgegengesetzt zur Geschwindigkeitsrichtung). Für die Beschleunigung durch Gravitation setze man $g = 4$ (alle Angaben in SI-Einheiten).

(i) Man benutze das Newtonsche Gesetz und zeige dass die Differentialgleichung

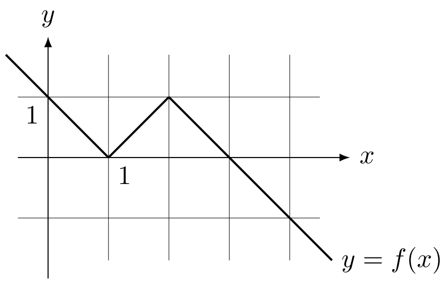
$$\frac{dv}{dt} = 4 - v^2$$

die Geschwindigkeit $v(t)$ beschreibt.
(ii) Man zeichne für diese Differentialgleichung (qualitativ) das Richtungsfeld im Bereich $(t, v) \in [0, 2] \times [0, 4]$.
(iii) Für die Anfangsbedingungen $v(0) = 0$, $v(0) = 2$ und $v(0) = 4$ zeichne man qualitativ die Lösungen ein und bestimme das Langzeitverhalten.

Aufgabe 14. Man betrachte die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

wobei die Funktion $f(x)$ durch den folgenden Graphen gegeben ist:



(i) Man skizziere das Richtungsfeld für den Bereich $(t, x) \in [0, 3] \times [0, 4]$.
(ii) Man skizziere die drei Lösungskurven zu den Anfangswerten $x_0 = 0.2, 1.2, 3.8$.
(iii) Man bestimme den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ für die gegebenen Anfangswerte.

Aufgabe 15. Man betrachte die Differentialgleichung

$$y' = y.$$

(i) Man zeichne (qualitativ) das Richtungsfeld.
(ii) Man zeichne Lösungskurven zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, 2, 1/2, -1$ ein
(iii) Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 16. Man finde die allgmeine Lösung der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)xy^2.$$

Aufgabe 17. Man versuche die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y}{x - y}$$

mit der Methode der Separation der Variablen zu lösen.

Aufgabe 18. Man löse die folgenden Gleichungen:

(i) $x^2 y' = y^2$
(ii) $y'(1 + x^2) = xy$
(iii) $y' \sin(y) = -x$
(iv) $y' - \sqrt{y} = 0$

Aufgabe 19. Glukose wird vom Körper mit einer Rate aufgenommen, welche proportional ist zur vorhandenen Glukosemenge im Blutstrom. Sei λ die dazugehörige Proportionalitätskonstante. Wir nehmen an zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Glukosemenge im Blutstrom G_0.

(i) Man stelle eine Differentialgleichung auf, welche die Glukosemenge im Blutstrom in Abhängigkeit der Zeit beschreibt und löse diese.
(ii) Es werde intravenös Glukose mit einer konstanten Rate r injiziert. Man stelle wieder eine Differentialgleichung auf, welche diese neue Situation beschreibt und löse diese.

Aufgabe 20. Man bestimme die allgemeine und partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $x^2 y' + y^2 = 0, \qquad y(0) = 0$
(ii) $y' = 9y^2 - 4, \qquad y(0) = 2/3$
Hinweis: Für die Integation in y verwende man Partialbruchzerlegung.
(iii) $y' - 3xy + 2y = 0, \qquad y(0) = 1$

Aufgabe 21. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$xy' = y + x.$$

(i) Ist diese Gleichung linear? Ist diese Gleichung separierbar? Man begründe die Antwort.
(ii) Man bestimme die allgemeine Lösung dieser Gleichung.
(iii) Man bestimme die partikuläre Lösung dieser Gleichung zur Anfangsbedingung $y(1) = 2$.

Aufgabe 22. Man löse das Anfangswertproblem

$$xy' - (x+1)y - x^2 + x^3 = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Aufgabe 23. Man finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Man gebe die Lösungen jeweils in der Form $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ an ($y_h(x)$: Lösung der homogenen Gleichung, $y_p(x)$: Lösung der inhomogenen Gleichung). (Hinweis: Die auftretenden Integrale der Form $\int xe^x dx$ bestimme man mit partieller Integration: $\int fg' = fg - \int f'g$)

(i) $y' - y = e^{2x}$
(ii) $y' + (x-1)y = 0$
(iii) $xy' + y = \sin(x)$
(iv) $y' + y = x$
(v) $xy' - (x+1)y - x^2 + x^3 = 0$
(vi) $y' + 2y = 3$

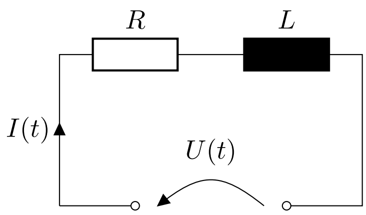
Aufgabe 24. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y' - y = e^x$, $y(1) = 0$.
(ii) $xy' + y + xe^x = 0$, $y(1) = 0$.

Aufgabe 25. In einem R-L-Stromkreis mit Ohmschem Widerstand R und Induktivität L genügt die Stromstärke $I(t)$ der Differentialgleichung

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U.$$

Hier ist $U = U(t)$ die angelegte Spannung.



(i) Man bestimme die Stromstärke $I(t)$ bei konstanter Spannung $U(t) = \text{konst.} = U_0$ und $I(0) = 0$.
(ii) Man bestimme die Stromstärke $I(t)$ bei linear mit der Zeit ansteigender Spannung $U(t) = at$ ($a > 0$) und $I(0) = 0$.
(iii) Man skizziere die Stromverläufe aus (i) und (ii) und bestimme das asymptotische Verhalten für grosse Zeiten.

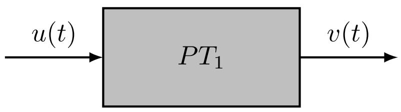
Aufgabe 26. Ein PT_1-Regelkreisglied lässt sich durch die lineare Differentialgleichung

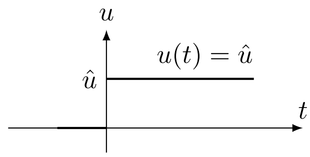
$$T\dot{v} + v = Ku$$

beschreiben. Hier ist $u = u(t)$ das Eingangssignal, $v = v(t)$ das Ausgangssignal und T, K sind Konstanten. Der schematische Aufbau ist untenstehend dargestellt. Man bestimme den zeitlichen Verlauf des Ausgangssignals $v(t)$ für $t \geq 0$, wenn das Eingangssignal eine sogenannte *Sprungfunktion* ist:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \hat{u} & t \geq 0. \end{cases}$$

Zu Beginn ($t = 0$) gilt $v(0) = 0$. Schematisch:





Aufgabe 27. Die Erwärmung eines Gleichstrommotors bei konstanter Verlustleistung P_v wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\tau \frac{dT}{dt}(t) + T(t) - T_1 = RP_v.$$

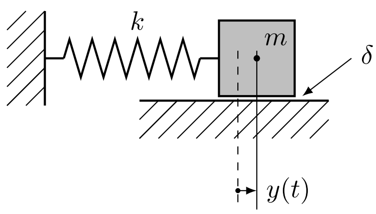
In dieser Gleichung ist τ eine thermische Zeitkonstante, T_1 die Anfangstemperatur des Motors, R der (konstante) Wärmewiderstand und $T(t)$ die Temperatur des Motors in Abhängigkeit der Zeit t.

Man bestimme den Temperaturverlauf des Motors in Abhängigkeit der Zeit t und der Konstanten R, P_v, T_1 und τ für $t \geq 0$ und skizziere diesen Verlauf.

Aufgabe 28. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = \pi$, $y'(0) = 0$.
(ii) $y'' - 20y' + 64y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
(iii) $4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0$, $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = -1$.

Aufgabe 29. Wir betrachten das folgende mechanische System bestehend aus Masse, Feder und geschwindigkeitsproportionaler Reibung:



Die Masse sei $m = 4$, der Reibungskoeffizient sei $\delta = 16$ und die Federkonstante sei $k = 7$. Wir bezeichnen mit $y(t)$ die Auslenkung aus der (gestrichelt eingezeichneten) Ruhelage. Alle Angaben sind in SI-Grundeinheiten.

(i) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Masse um 1 nach rechts ausgelenkt und werde losgelassen. Man bestimme $y(t)$ und sizziere den Graphen dazu.
(ii) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Masse um 1 nach rechts ausgelenkt und es werde ihr ein Stoss in Richtung der Ruhelage versetzt, so dass sich die Masse zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Geschwindigkeit von 5 in Richtung der Ruhelage bewegt. Man bestimme $y(t)$ und sizziere den Graphen dazu. Man bestimme den Zeitpunkt des Durchgangs durch die Ruhelage, i.e. man bestimme $t^* > 0$ so dass $y(t^*) = 0$.
(iii) Anfangsbedingungen wie in (ii). Man bestimme den Zeitpunkt in welchem die Masse keine Geschwindigkeit besitzt, i.e. man bestimme $\tilde{t} > 0$ so dass $y'(\tilde{t}) = 0$.
(iv) Der Masse werde zum Zeitpunkt $t = 0$ der gleiche Stoss versetzt wie in (ii) (i.e. die Anfangsgeschwindigkeit ist die selbe wie in (ii)). Wie gross darf die Auslenkung (nach rechts) zum Zeitpunkt $t = 0$ maximal sein, damit die Masse in ihrer Bewegung durch die Ruhelage hindurch geht?

(v) Die Masse besitze zum Zeitpunkt $t = 0$ die gleiche Auslenkung wie in (i). Wie klein muss die Anfangsgeschwindigkeit $-v_0$ (mit $v_0 > 0$) zum Zeitpunkt $t = 0$ sein, damit die Masse in ihrer Bewegung durch die Ruhelage hindurch geht?

Aufgabe 30. Man bestimme die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

(i)

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{-3x}, \\ \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} y'' + 4y = 17, \\ \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Aufgabe 31. Man finde die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungen:

(i) $y'' - 4y = 3e^{2x}$,
(ii) $y'' + 2y = x^2$,
(iii) $y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$,
(iv) $y'' - 10y' + 41y = \sin(x)$.

Aufgabe 32. Man finde eine Lösung der folgenden Gleichungen:

(i) $y'' - 4y' - 12y = \sin(2x)$,
(ii) $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$,
(iii) $y'' + 4y = 8x^2$,
(iv) $y'' - y' - 2y = 10\cos(x)$.

Aufgabe 33. Die Differentialgleichung welche das System Feder-Masse-Reibung-Anregung beschreibt lautet

$$y'' + 2\Delta y' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung davon ist

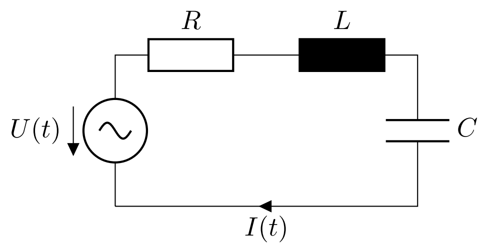
$$y(t) = C\cos(\omega t + \phi),$$

wobei C von ω wie folgt abhängt:

$$C(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta^2\omega^2}}.$$

Man finde den Wert von ω bei welchem $C(\omega)$ maximal wird und bestimme den maximalen Wert von C.

Aufgabe 34. Wir betrachten den folgenden elektrischen R-L-C-Kreis:



Die Spannungsabfälle an den Elementen sind

$$\text{Widerstand:} \quad U_R = RI, \qquad \text{Kondensator:} \quad U_C = \frac{Q}{C}, \qquad \text{Spule:} \quad U_L = L\frac{dI}{dt}.$$

Die Spannungsquelle liefert die Spannung $U(t) = U_0\sin(\omega t)$.

(i) Unter Verwendung von $I = \frac{dQ}{dt}$ finde man die Differentialgleichung für die Funktion $I(t)$, welche dieses System beschreibt.
(ii) Man finde eine Lösung der inhomogenen Gleichung.
(iii) Man schreibe die Lösung aus (ii) in der Form

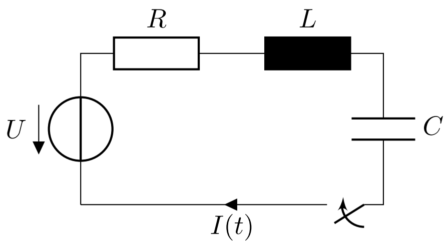
$$I_i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

und zeige dass in diesem Ausdruck I_0 folgendermassen von ω abhängt:

$$I_0(\omega) = \frac{U_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}},$$

wobei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Eigenfrequenz des Systems ist.
(iv) Man finde den Wert von ω bei welchem das Maximum von $I_0(\omega)$ (Resonanzfrequenz). Man vergleiche die Situation mit dem mechanischen System (siehe Vorlesung).

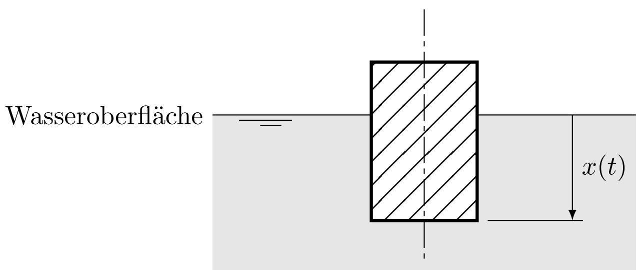
Aufgabe 35. Wir betrachten einen elektrischen Schaltkreis bestehend aus einer Spule mit $L = 1$, einem Widerstand $R = 100$, einem Kondensator $C = 10^{-4}$ und einer Spannungsquelle mit $U = 1000$ (Gleichstrom). Alle Angaben in SI-Einheiten.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich keine Ladung auf dem Kondensator. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter geschlossen.
(i) Man bestimme $I(t)$ unter der Annahme dass $I(0) = 0$.
(ii) Man bestimme die Ladung welche sich nach langer Zeit auf dem Kondensator befindet, i.e. man bestimme $\lim_{t\to\infty} Q(t)$, wobei $Q(t)$ die Ladung auf dem Kondensator ist.

Aufgabe 36. Man finde eine Lösung der folgenden Gleichungen:
(i) $y'' + 9y = 2e^{3x}$,
(ii) $y'' + 9y = 9x + 9$,
(iii) $y'' + 9y = 6e^{3x} + 18x + 18$.

Aufgabe 37. Wir betrachten eine zylindrische Boje mit Masse m und Grundfläche A. Die Zylinderachse der Boje liege normal zur Wasseroberfläche. Die Einsinktiefe der Boje sei $x(t)$. Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.



(i) Man finde die Differentialgleichung welche die vertikale Bewegung $x(t)$ der Boje beschreibt. Dazu betrachte man das Problem eindimensional (vertikale Bewegung) und vernachlässige jegliche Form von Reibung und seitlichen Bewegungen. Man nehme auch an dass sich die Boje nie ganz aus dem Wasser hinausbewegt und die Boje nie ganz unter Wasser verschwindet.

(ii) Man finde die allgmeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(iii) Die Boje werde zum Zeitpunkt $t = 0$ um $x(0) = x_0$ ins Wasser eingetaucht und losgelassen. Man finde die dazugehörige partikuläre Lösung.

Aufgabe 38. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

(i)

$$\begin{cases} y' - y = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} y' + 4y = e^{-4t}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 4y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

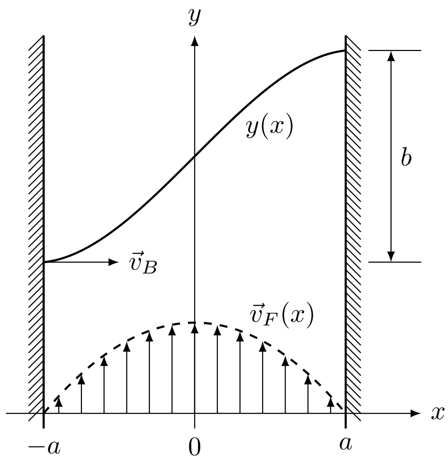
(iv)

$$\begin{cases} y'' + y = \cos(2t), \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Aufgabe 39. Wir betrachten einen Fluss dessen Mittellinie entlang der y-Achse verläuft. Die Strömungsgeschwindigkeit sei gegeben durch

$$\vec{v}_F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_F(x) \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \qquad v_F(x) = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Hier ist $2a$ die Breite des Flusses und v_0 ist die Geschwindigkeit in der Mitte des Flusses. Ein Boot, welches den Fluss überquert, fährt relativ zum Fluss immer senkrecht zur Strömungsrichtung mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_B$.



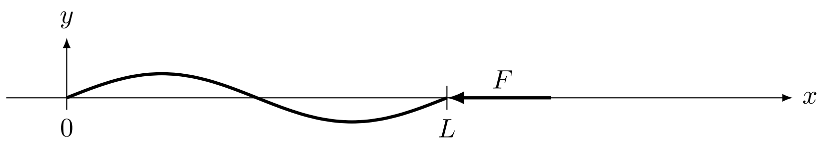
(i) Man bestimme die Bahnkurve $y(x)$ des Bootes über Grund.

(ii) Man bestimme b, i.e. wie weit das Boot abgetrieben wurde.

Aufgabe 40. Die Eulersche Knickgleichung

$$EIy''(x) = -Fy(x) \quad \text{für} \quad 0 < x < L,$$

beschreibt die Auslenkung $y(x)$ eines horizontalen Stabes aus einem Material mit Elastizitätsmodul E und einem Querschnitt mit Flächenträgheitsmoment I, welcher durch eine Kraft der Stärke F horizontal belastet wird:



Im folgenden darf angenommen werden dass $L =$ konst., da die horizontale Verformung vernachlässigbar ist.

(i) Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(ii) Man finde alle Lösungen der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(iii) Man verwende die Bedingung $y(L) = 0$ um zu zeigen, dass für kleine Kräfte F die Lösung $y(x) \equiv 0$ die einzige Lösung der Differentialgleichung ist.

(iv) Es gibt eine kleinste Kraft F_0, bei welcher der Stab verbogen wird, d.h. es gibt eine von Null verschiedene Lösung. Man berechne F_0.

(v) Wie gross ist die Kraft F in der Situation der obigen Figur?

Aufgabe 41. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme für $y(x)$:

(i)
$$\begin{cases} y'' - 8y' + 17y = 0, \\ \qquad y(0) = -4, \\ \qquad y'(0) = -1. \end{cases}$$

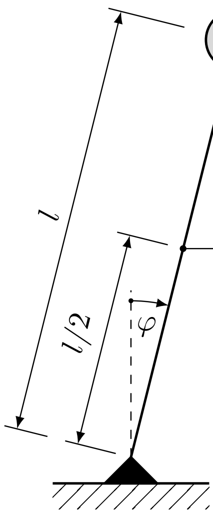
(ii)
$$\begin{cases} \quad y' = (x^2 - 4)(3y + 2), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 42. Man löse die folgenden Anfangswertprobleme für $y(t)$:

(i)
$$\begin{cases} ty' + 2y = t^2 - t + 1, \\ \quad y(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} y'' + 8y' + 17y = 2e^{-3t}, \\ \qquad y(0) = 2, \\ \qquad y(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 43. Man beachte den Hinweis am Ende der Aufgabe. Wir betrachten das folgende mechanische System:



(i) Für die erste Teilaufgabe wird die Feder weggelassen. Man finde die Differentialgleichung für den Winkel $\varphi(t)$. Man bestimme die allgemeine Lösung sowie die partikuläre Lösung wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse durch die Ruhelage $\varphi = 0$ mit einer Horizontalgeschwindigkeit von v_0 geht. Die Situation soll für kleine φ betrachtet werden.

(ii) Für die zweite Teilaufgabe soll die Feder mitberücksichtigt werden. Für $\varphi = 0$ sei die Feder ungespannt. Man finde die Bedingung an die Federkonstante k, so dass periodische Lösungen möglich sind. Man bestimme die dazugehörige Frequenz der Schwingung.

Hinweis: Die zu $F = ma$ analoge Gleichung für Rotationsbewegung ist $M = I\ddot{\varphi}$, wobei M das resultierende Drehmoment und $I = ml^2$ das Massenträgheitsmoment des Pendels um die Rotationsachse ist.

Aufgabe 44. Wir betrachten einen vollen Flüssigkeitsbehälter welcher über seine gesamte Höhe den gleichen Querschnitt A_0 aufweist. Am unteren Ende der Mantelfläche des Behälters wird ein Loch mit Querschnitt A geöffnet. Die Austrittsgeschwindigkeit (nach Toricelli) ist gegeben durch $v = \sqrt{2gh}$, wobei wir mit h die Niveauhöhe der Flüssigkeit im Behälter und mit g die Gravitationskonstante in Erdnähe bezeichnen.

(i) Man finde eine Differentialgleichung für $h(t)$.

(ii) Man finde die Lösung dieser Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $h(0) = H$.

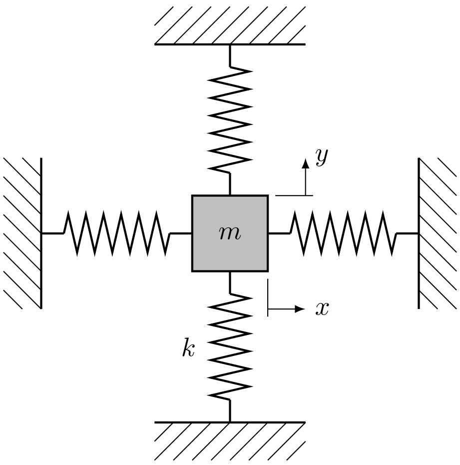
(iii) Man finde die Zeit die benötigt wird um den Behälter zu leeren.

(iv) Der Behälter wird auf einen Schubkarren gestellt und von einem Esel mit konstanter horizontaler Kraft F_0 gezogen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Schubkarren in Ruhe und das Niveau im Behälter sei gleich H. Das Newtonsche Gesetz der Dynamik für den Fall veränderlicher Masse $m(t)$ ist (dies ist nicht zu zeigen):

$$F = m(t)\frac{dv}{dt}(t).$$

Man vernachlässige die Masse des Schubkarrens und des Behälters und bestimme $v(t)$.

Aufgabe 45. Eine Masse m liege (reibungsfrei) auf einem Tisch und sei durch vier identische Federn wie in der folgenden Draufsicht eingespannt:



(i) Man finde Differentialgleichungen für die Auslenkung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

aus der Ruhelage. Man betrachte dabei nur kleine Auslenkungen, so dass die Winkeländerungen der Federn vernachlässigt werden können.

(ii) Man finde die allgemeine Lösungen $\vec{r}(t)$.

(iii) Man finde die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen:

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

(iv) Man zeige dass die Lösung $\vec{r}(t)$ aus (iii) eine Ellipse beschreibt, i.e. man finde die Konstanten A, B in der Ellipsengleichung

$$\frac{x(t)^2}{A^2} + \frac{y(t)^2}{B^2} = 1.$$

Aufgabe 46. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man finde die allgemeine Lösung von $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ und bestimme die möglichen Werte von α und β so dass das Anfangswertproblem

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \qquad \overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

eine Lösung besitzt, welche sich für $x \to \infty$ dem Ursprung annähert.

Aufgabe 47. Man löse das Anfangswertproblem

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \quad \overrightarrow{y}(x_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

wobei $A = \alpha\mathbb{1}$.

Aufgabe 48. Man löse das Anfangswertproblem

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \quad \overrightarrow{y}(x_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 49. Man schreibe die folgenden Differentialgleichungen als System von Differentialgleichungen erster Ordnung und gebe die Matrix A der dazugehörigen Matrixschreibweise $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ sowie den Vektor $\overrightarrow{y}(3)$, resp. $\overrightarrow{y}(0)$ an.

(i)

$$2y'' - 5y' + y = 0, \qquad y(3) = 6, \quad y'(3) = -1.$$

(ii)

$$y^{(4)} + 3y'' - 17y' = -8y, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3, \quad y'''(0) = 4.$$

Aufgabe 50. Für die folgenden Gleichungssystem finde man die Lösung zu den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 2$ und klassifiziere den Ursprung $(y_1, y_2) = (0, 0)$ (dies ist der Fixpunkt) als Attraktor, Repeller oder Sattelpunkt.

(i)

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 - y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

(iv)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

Aufgabe 51. Wir betrachten die Differentialgleichung und die zugehörigen Anfangsbedingungen

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

(i) Man schreibe das System in der Form

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}.$$

(ii) Man bestimme die Richtung der Tangente an die Lösungskurve im Phasenraum zum Zeitpunkt $t = 0$.

(iii) Man skizziere (qualitativ) die Lösungskurve im Phasenraum und mache eine Aussage zur Stabilität des Systems.

Aufgabe 52. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

(i) Man schreibe die Gleichung in der Form $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$.

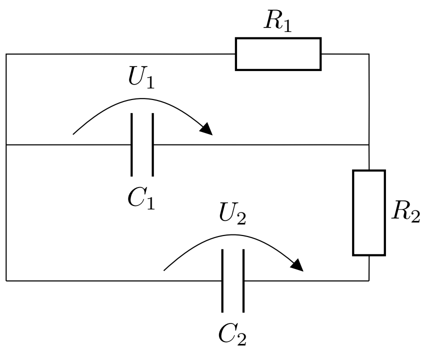
(ii) Man finde die allgemeine Lösung $y(t)$.

(iii) Die Anfangsbedingungen seien

$$y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = \beta,$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Man finde die möglichen Werte von α und β so dass sich die Lösung im Phasenraum auf einer Geraden durch den Ursprung befindet.

Aufgabe 53. Wir betrachten den folgenden Schaltkreis:



(i) Man zeige dass die Spannungen über den Kondensatoren $U_1(t)$, $U_2(t)$ durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben werden:

$$\begin{cases} U_1' = -\dfrac{1}{R_1C_1}U_1 + \dfrac{1}{R_2C_1}(U_2 - U_1), \\ U_2' = \dfrac{1}{R_2C_2}(U_1 - U_2). \end{cases}$$

(ii) Man schreibe das obige System von Differentialgleichungen um auf die Form

$$\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U},$$

wobei $\overrightarrow{U}(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix}$, i.e. man finde die Matrix A.

(iii) Seien (in SI-Einheiten)

$$R_1 = 1, \qquad R_2 = 2, \qquad C_1 = 1, \qquad C_2 = \frac{1}{2}.$$

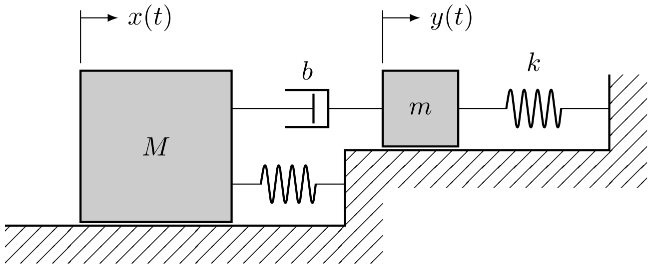
Man finde die allgemeine Lösung $\overrightarrow{U}(t)$.

(iv) Man finde die Gleichung der Tangente an die Lösungskurve im Phasenraum im Punkt

$$(U_1, U_2) = (5, 4).$$

(v) Man finde Bedingungen an die Spannungen zum Zeitpunkt $t = 0$, so dass sich die Lösung im Phasenraum auf einer Geraden befindet.

Aufgabe 54. Wir betrachten das folgende mechanische System:



Die beiden Massen liegen reibungsfrei auf der Unterlage. $x(t)$, $y(t)$ sind die Auslenkungen aus den Ruhelagen. Die Federkonstanten der beiden Federn sind identisch.

(i) Man finde die Bewegungsgleichungen für $x(t)$, $y(t)$.

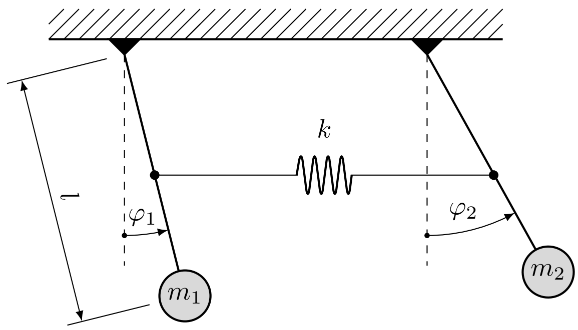
(ii) Man schreibe die Gleichungen aus (i) in Form eines Gleichungssystems erster Ordnung. Dazu führe man die Funktionen

$$z_1 = x, \qquad z_2 = x', \qquad z_3 = y, \qquad z_4 = y'$$

ein und finde die Matrix A in $\overrightarrow{z}' = A\overrightarrow{z}$, wobei

$$\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 55. Zwei Pendel der Länge l sind durch eine Feder mit Federkonstanten k gekoppelt:



(i) Man finde die Bewegungsgleichungen für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$. Man betrachte dazu nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage.

Hinweise:

(a) Die Federn sind jeweils in der Mitte der Pendel befestigt und die Länge der ungespannten Feder entspricht dem horizonalen Abstand der beiden Pendelaufhängungspunkte.

(b) Die zu $F = ma$ analoge Gleichung für Rotationsbewegung eines Pendels ist $M = I\ddot{\varphi}$, wobei M das resultierende Drehmoment und $I = ml^2$ das Massenträgheitsmoment des Pendels um die Rotationsachse ist.

(ii) Man schreibe die Gleichungen aus (i) in Form eines Gleichungssystems erster Ordnung und formuliere dieses Gleichungssystem in Matrixform.

Lösung 1. (i) 1, (ii) 1, (iii) 2, (iv) 1, (v) 3, (vi) 2

Lösung 2.

(i) $y' = G(x, y) = \frac{x}{y}$
(ii) $y' = G(x, y) = \frac{x+y}{x^2}$
(iii) $y' = G(x, y) = x - y$
(iv) $y' = G(x, y) = 1 - \frac{y}{x}$
(v) $y'' = G(x, y, y') = y'$
(vi) $y' = G(x, y) = -y^2 + \frac{y}{x}$
(vii) $y' = G(x, y) = -(1/x+17)/(1/y+1)$

Lösung 3. Durch einsetzen.

Lösung 4. Durch einsetzen.

Lösung 5. $y(x) = \log(x) + C$

Lösung 6. Alle gegebenen Funktionen sind Lösungen der Gleichung.

Lösung 7. Die zu untersuchende Lösung ist $y(x) = xe^{-x}$. Wir haben somit $y'(x) = (1-x)e^{-x}$, $y''(x) = (x-2)e^{-x}$. Eingesetzt in die linke Seite der Gleichung $y''+2y'+y = 0$ ergibt

$$y'' + 2y' + y = (1 - x)e^{-x} + 2(x - 2)e^{-x} + xe^{-x} = 0,$$

was der rechten Seite entspricht. Somit ist die Gleichung erfüllt, i.e. $y(x) = xe^{-x}$ ist eine Lösung dieser Gleichung.

Lösung 8.
(i) Die Differentialgleichung ist zweiter Ordnung.
(ii) Wir haben $y'(x) = \log(x) + 1$, $y''(x) = \frac{1}{x}$. Eingesetzt in der linken Seite der Gleichung ergibt

$$x^3(\log(x) + 1)\left(\frac{1}{x}\right)^2 = x(\log(x) + 1) = x\log(x) + x.$$

Dies entspricht der rechten Seite der Differentialgleichung, somit ist $y(x)$ eine Lösung.

Lösung 9. Eingesetzt in der linken Seite der Gleichung ergibt

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = -17y_1^2 - 17y_2^2,$$

wobei wir für die zweite Zeile verwendet haben dass y_1, y_2 Lösungen der Differentialgleichung sind. Eingesetzt in der rechten Seite der Gleichung ergibt

$$-17(y_1 + y_2)^2 = -17(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2).$$

Dies stimmt im Allgemeinen nicht mit der linke Seite überein, da im Allgemeinen der Mischterm $2y_1y_2$ nicht verschwindet.

Lösung 10.
(i) Man überprüft durch einsetzen dass die gegebenen Funktionen Lösungen sind.
(ii) Jede Funktion der Form

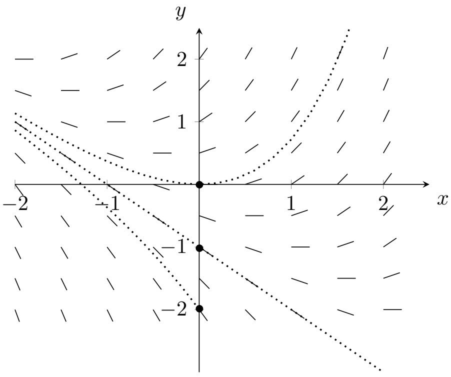
$$y(x) = C_1x^{-3/2} + C_2x^{-1/2}$$

mit C_1, C_2 zwei Konstanten ist eine Lösung.
(iii) Die Lösung lautet

$$y(x) = x^{-3/2}.$$

Lösung 11.

(i) Wir setzen $m = x + y =$ konst. und finden dass die Kurven konstanter Steigung (dies sind die Isoklinen) Geraden mit Steigung -1 entsprechen. Beispielsweise besitzt das Richtungsfeld die Steigung $m = 0$ auf der Geraden $y = -x$ und Steigung $m = -1$ auf der Geraden $y = -x - 1$.

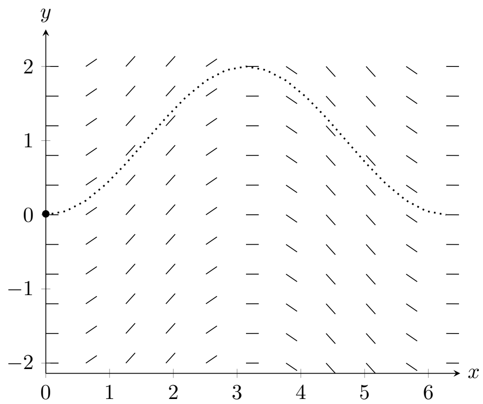


(ii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet, die Anfangsbedingungen sind durch die fetten Punkte gegeben.

(iii) Für $y(0) > -1$ haben wir $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ und für $y(0) \leq -1$ haben wir $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

Lösung 12.

(i)



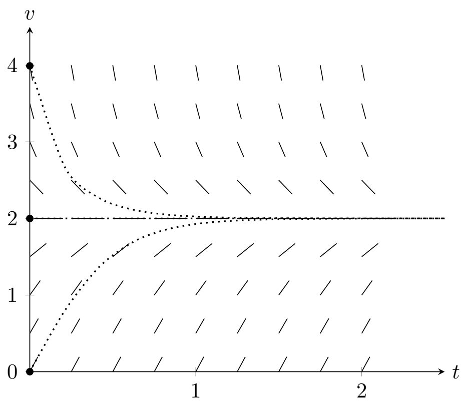
(ii) Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = -\cos(x) + C$.

(iii) Die partikuläre Lösung lautet $y(x) = -\cos(x) + 1$. Sie ist im Richtungsfeld gepunktet eingezeichnet.

Lösung 13.

(i) Das Newtonsche Gesetz ist $F = ma$, wobei $a = dv/dt$. Die resultierende Kraft ist die Differenz zwischen Gewichtskraft und Strömungswiderstandskraft: $F = mg - 10v^2$. Mit $m = 10$ ergibt sich die gesuchte Gleichung.

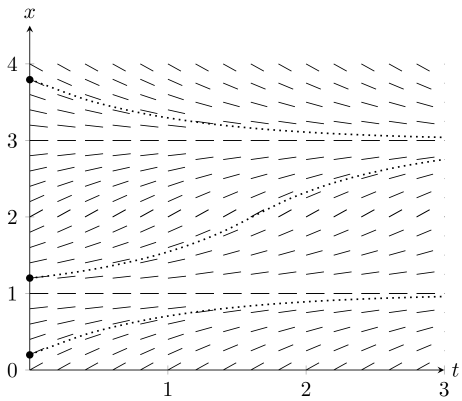
(ii)



(iii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet. Die Anfangsbedingungen sind durch die Punkte gegeben. Unabhängig von der Anfangsbedingung ergibt sich für grosse Zeiten ($\lim_{t\to\infty}$) die Geschwindigkeit $v = 2$.

Lösung 14.

(i)

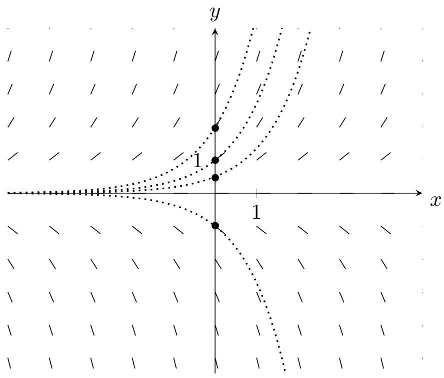


(ii) Gepunktet eingezeichnet.

(iii) Für $x_0 = 0.2$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$, für $x_0 = 1.2, 3.8$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 3$.

Lösung 15.

(i)



(ii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet.

(iii) Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = Ce^x$.

Lösung 16.

$$y(x) = \frac{-4}{2x^2 + x^4 + C}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Lösung 17. Diese Gleichung lässt sich nicht mit der Methode der Separation der Variablen lösen (die Variablen lassen sich nicht separieren).

Lösung 18.

(i) $y(x) = \frac{x}{Cx+1}$

(ii) $y(x) = C\sqrt{1+x^2}$

(iii) $y(x) = \arccos\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$

(iv) $y(x) = \frac{(x+C)^2}{4}$

Lösung 19.

(i) Gleichung und Lösung:

$$G' = -\lambda G, \qquad G(t) = G_0 e^{-\lambda t}.$$

(ii) Die beschreibende Gleichung ist

$$G' = -\lambda G + r.$$

Diese ist separierbar. Die allgemeine Lösung lautet

$$G(t) = Ce^{-\lambda t} + \frac{r}{\lambda}.$$

Aus der Anfangsbedingung $G(0) = G_0$ folgt

$$G(t) = \left(G_0 - \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + \frac{r}{\lambda}.$$

Lösung 20.

(i) Allgemeine Lösung: $y(x) = \frac{x}{Cx-1}$, Anfangsbedingungen werden von allen Lösungen erfüllt.

(ii) Allgemeine Lösung: $y(x) = \frac{2}{3}\frac{(1+Ce^{12x})}{(1-Ce^{12x})}$. Partikuäre Lösung: $y(x) = \frac{2}{3}$.

(iii) Allgemeine Lösung: $y(x) = Ce^{3x^2/2-2x}$. Partikuäre Lösung: $y(x) = e^{3x^2/2-2x}$.

Lösung 21.

(i) Die Gleichung ist linear:

$$y' = \frac{y}{x} + 1,$$

i.e. $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1$. Die Gleichung ist nicht separierbar, die Variablen lassen sich nicht trennen.

(ii) Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y_h(x) = Cx.$$

Variation der Konstanten ergibt den Ansatz $y_p(x) = \varphi(x)x$. Einsetzen in der inhomogenen Gleichung ergibt

$$\varphi'(x)x + \varphi(x) = \varphi(x) + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{x}.$$

Daraus folgt $\varphi(x) = \log(x) + C$. Die Konstante setzen wir gleich Null (wir benötigen nur eine partikuläre Lösung) und haben somit

$$y_p(x) = x\log(x).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cx + x\log(x).$$

(iii) Einsetzen der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ in die allgemeine Lösung ergibt $C = 2$. Somit lautet die partikuläre Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = 2$

$$y(x) = 2x + x\log(x).$$

Lösung 22. Die Gleichung ist erster Ordnung, linear und inhomogen. Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$y' = \frac{x+1}{x}y.$$

Die Lösung davon findet man mit Separation der Variablen:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx, \qquad \text{i.e.} \qquad \log(y) = x + \log(x) + C, \qquad \text{i.e.} \qquad y_h(x) = Cxe^x.$$

Der Ansatz für Variation der Konstanten lautet

$$y_i(x) = \varphi(x)xe^x.$$

Eingesetzt in der Differentialgleichung führt auf $\varphi' = (1-x)e^{-x}$. Diese Gleichung kann mit Separation der Variablen gelöst werden (für die Integration von xe^{-x} kann partielle Integration verwendet werden). Wir erhalten $\varphi(x) = xe^{-x}$ und somit $y_i(x) = x^2$. Daraus folgt

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) = Cxe^x + x^2.$$

Die Anfangsbedingung führt auf $C = -e^{-1}$, i.e.

$$y(x) = -xe^{x-1} + x^2.$$

Lösung 23.

(i) $y_h(x) = Ce^x$, $y_p(x) = e^{2x}$. Somit $y(x) = Ce^x + e^{2x}$.
(ii) $y_h(x) = Ce^{x-\frac{x^2}{2}}$, $y_p(x) = 0$ (die Gleichung ist homogen).
(iii) $y_h(x) = \frac{C}{x}$, $y_p(x) = -\frac{\cos(x)}{x}$. Somit $y(x) = \frac{C-\cos(x)}{x}$.
(iv) $y_h(x) = Ce^{-x}$, $y_p(x) = x - 1$. Somit $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$.
(v) $y_h(x) = Cxe^x$, $y_p(x) = x^2$. Somit $y(x) = Cxe^x + x^2$.
(vi) $y_h(x) = Ce^{-2x}$, $y_p(x) = \frac{3}{2}$. Somit $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$.

Lösung 24.

(i) $y(x) = (x-1)e^x$

(ii) $y(x) = \frac{1-x}{x}e^x$

Lösung 25. Die Gleichung ist erster Ordnung und inhomogen. Lösung der homogenen Gleichung: $I_h(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}$.

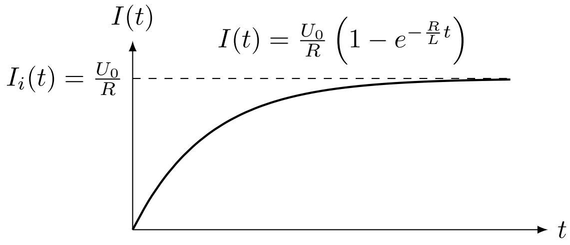
(i) Variation der Konstanten liefert $I_i(t) = \frac{U_0}{R}$. Somit ist die allgemeine Lösung $I(t) = I_h(t) + I_i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R}$. Die Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt die partikuläre Lösung

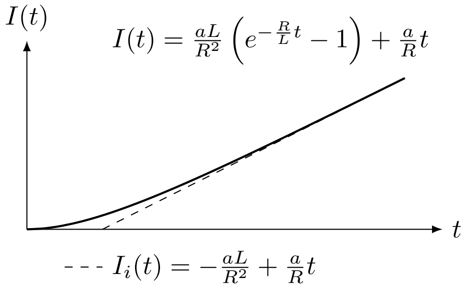
$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

(ii) Variation der Konstanten liefert $I_i(t) = -\frac{aL}{R^2} + \frac{a}{R}t$. Somit ist die allgemeine Lösung $I(t) = I_h(t) + I_i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} - \frac{aL}{R^2} + \frac{a}{R}t$ und die Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt die partikuläre Lösung

$$I(t) = \frac{aL}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1\right) + \frac{a}{R}t.$$

(iii)





Das asymptotische Verhalten ist bei (i) $I_i(t) = \frac{U_0}{R}$ und bei (ii) $I_i(t) = -\frac{aL}{R^2} + \frac{a}{R}t$, entsprechend der Lösung der inhomogenen Gleichung $I_i(t)$, welche für das Verhalten für grosse Zeiten massgebend ist.

Lösung 26. Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösung der homogenen Gleichung ist $v_h(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$. Das Eingangssignal der Sprungfunktion entspricht $u(t) = \hat{u}$ für den uns interessierenden Zeitbereich $t \geq 0$. Variation der Konstanten ergibt die Lösung der inhomogenen Gleichung $v_i(t) = K\hat{u}$. Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$v(t) = Ce^{-\frac{t}{T}} + K\hat{u}.$$

Die Anfangsbedingung $v(0) = 0$ ergibt die partikuläre Lösung

$$v_p(t) = K\hat{u}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right),$$

welche das Ausgangssignal für $t \geq 0$ beschreibt.

Lösung 27. Die Gleichung lässt sich umschreiben auf

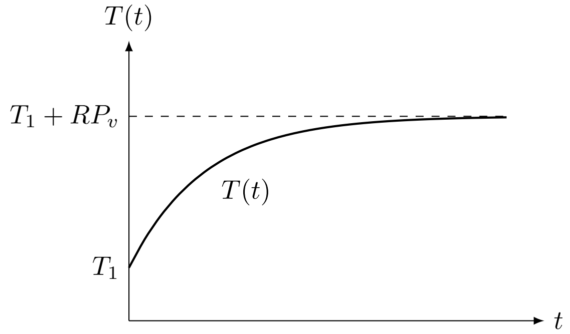
$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau}\left(T - T_1 - RP_v\right)$$

und ist separierbar. Separation und Integration liefert

$$\int \frac{1}{T - T_1 - RP_v} dT = -\int \frac{1}{\tau} dt, \qquad \text{i.e.} \qquad \log(T - T_1 - RP_v) = -\frac{t}{\tau} + C.$$

Auflösen nach T ergibt die allgemeine Lösung $T(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + T_1 + RP_v$. Die Anfangsbedingung $T(0) = T_1$ führt auf

$$T(t) = T_1 + RP_v(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$



Lösung 28.

(i) $\lambda_\pm = -2 \pm j$. Allgemeine Lösung: $y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$, partikuläre Lösung: $y_p(x) = \pi e^{-2x}(\cos(x) + 2\sin(x))$.

(ii) $\lambda_\pm = 10 \pm 6$. Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{16x}$, partikuläre Lösung: $y_p(x) = \frac{1}{6}(-e^{4x} + e^{16x})$.

(iii) $\lambda_\pm = \frac{1}{2}$. Allgemeine Lösung: $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\frac{1}{2}t}$, partikuläre Lösung: $x_p(t) = (5 - \frac{7}{2}t)e^{\frac{1}{2}t}$.

Lösung 29.

(i) Nach dem Einsetzen der gegebenen Konstanten in das Newtonsche Gesetz und einer Umformung lautet die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + \frac{7}{4}y = 0.$$

Die Lösungen des charakteristischen Polynoms sind $\lambda_\pm = -2 \pm \frac{3}{2}$ und somit lautet die allgemeine Lösung

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{7}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ folgt

$$y(t) = -\frac{1}{6}e^{-\frac{7}{2}t} + \frac{7}{6}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

(ii) Mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$ folgt

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-\frac{7}{2}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

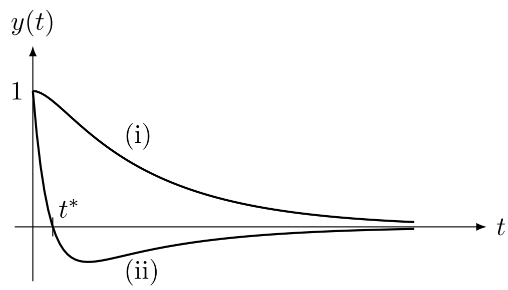
Den Zeitpunkt des Nulldurchgangs finden wir durch Null setzen dieses Ausdrucks:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{3}{2}e^{-\frac{7}{2}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}e^{-\frac{7}{2}t}\left(3 - e^{3t}\right),$$

i.e. als Lösung der Gleichung

$$3 - e^{3t} = 0.$$

Es folgt $t^* = \frac{1}{3}\log(3)$.



(iii) $y'(t)$ ergibt: $t^* = \frac{1}{3}\log(21)$.

(iv) Mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$, $y'(0) = -5$ folgt

$$y(t) = \frac{10 - y_0}{6} e^{-\frac{7}{2}t} + \frac{7y_0 - 10}{6} e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{6} e^{-\frac{7}{2}t} \left(10 - y_0 + (7y_0 - 10)e^{3t}\right).$$

Die Gleichung des Nulldurchgangs $y(t) = 0$ aufgelöst nach t ist

$$t = \frac{1}{3} \log\left(\frac{y_0 - 10}{7y_0 - 10}\right).$$

Diese Gleichung besitzt nur eine Lösung $t \geq 0$ für

$$\frac{y_0 - 10}{7y_0 - 10} \geq 1$$

i.e. für $y_0 \in [0, \frac{10}{7})$. Somit muss die Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ weniger als $y_0 = \frac{10}{7}$ betragen.

(v) $v_0 > 3.5$.

Lösung 30.

(i) Die dazugehörige homogene Gleichung ist $y'' + 4y = 0$. Das charakteristische Polynom dazu ist $\lambda^2 + 4 = 0$ mit Lösungen $\lambda_\pm = \pm 2j$. Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_i(x) = Ae^{-3x}.$$

Einsetzen ergibt $A = \frac{1}{13}$, i.e. wir haben die Lösung $y_i(x) = \frac{1}{13}e^{-3x}$ der inhomogenen Gleichung gefunden. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{13}e^{-3x}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt $C_1 = -\frac{1}{13}$, $C_2 = \frac{3}{26}$, i.e. die partikuläre Lösung zu den gegebenen Anfangsbedingungen lautet

$$y_p(x) = -\frac{1}{13}\cos(2x) + \frac{3}{26}\sin(2x) + \frac{1}{13}e^{-3x}.$$

(ii) Wir haben

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y_i(x) = A$. Einsetzen ergibt $A = \frac{17}{4}$, i.e. $y_i(x) = \frac{17}{4}$. Zusammen mit den Anfangsbedingungen folgt

$$y_p(x) = -\frac{17}{4}\cos(2x) + \sin(2x) + \frac{17}{4}.$$

Lösung 31.

(i) Charakteristisches Polynom ist $\lambda^2 - 4 = 0$ mit Lösung $\lambda = \pm 2$. Somit haben wir $y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y_i(x) = Ae^{2x}$. Beim Einsetzen verschwindet die linke Seite der Differentialgleichung jedoch, i.e. dieser Ansatz ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Neuer Ansatz (Multiplikation mit x): $y_i(x) = Axe^{2x}$. Einsetzen ergibt $A = \frac{3}{4}$, i.e. $y_i(x) = \frac{3}{4}xe^{2x}$ und somit ist

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{4}xe^{2x}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(ii) $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x) + \frac{x^2-1}{2}$,

(iii) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{7}e^{3x}$,

(iv) $y(x) = e^{5x}(C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)) + \frac{1}{170}(\cos(x) + 4\sin(x))$.

Lösung 32.

(i) $y(x) = \frac{1}{40}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)$,
(ii) $y(x) = \frac{2}{3}e^{-2x}$,
(iii) $y(x) = 2x^2 - 1$,
(iv) $y(x) = -3\cos(x) - \sin(x)$.

Lösung 33. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = (\omega_0^2 - z)^2 + 4z\Delta^2,$$

deren Quadratwurzel (mit $z = \omega^2$) im Nenner von $C(\omega)$ auftritt. $C(\omega)$ wird maximal an der Stelle an welcher $f(z)$ minimal ist.

$$\frac{df}{dz} = -2(\omega_0^2 - z) + 4\Delta^2.$$

Diesen Ausdruck Null gesetzt ergibt

$$z = \omega_0^2 - 2\Delta^2, \qquad \text{i.e.} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Delta^2}.$$

Im folgenden verwenden wir für diesen Wert von ω die Bezeichung $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Delta^2}$ (Index R für Resonanzfrequenz). Wir haben

$$f(\omega_R) = 4\Delta^2(\omega_0^2 - \Delta^2)$$

und somit ist der maximale von $C(\omega)$

$$C(\omega_R) = \frac{F_0}{2\Delta\sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}}.$$

Lösung 34.

(i) Die Summe der Spannungen in der Masche muss verschwinden, somit haben wir

$$U_R + U_C + U_L = U(t),$$

i.e.

$$RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = U_0\sin(\omega t).$$

Ableiten nach der Zeit ergibt die folgende lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = U_0\omega\cos(\omega t).$$

(ii) Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$I_i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Ableiten ergibt

$$I_i'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t), \qquad I_i''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t).$$

Einsetzen in der Differentialgleichung und ordnen der linken Seite nach Sinus- und Kosinustermen ergibt

$$\left(\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)A + \omega RB\right)\cos(\omega t) + \left(\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)B - \omega RA\right)\sin(\omega t) = U_0\omega\cos(\omega t).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)A + \omega RB = U_0\omega,$$
$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)B - \omega RA = 0.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Konstanten A, B. Auflösen ergibt

$$A = \frac{U_0\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)}{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}, \qquad B = \frac{U_0 R}{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}.$$

Damit haben wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung gefunden:

$$I_i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

wobei die Konstanten A und B durch die obigen Ausdrücke gegeben sind.

(iii) Für $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = I_0\cos(\omega t + \varphi)$ muss gelten $I_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$. Mit den obigen Ausdrücken für A und B folgt

$$I_0(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{L^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + R^2}},$$

wobei wir für die letzte Gleichung $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ verwendet haben.

(iv) Das Maximum von $I_0(\omega)$ liegt vor wenn der Nenner im obigen Bruch das Minimum annimmt, i.e. wenn $\frac{\omega_0^2}{\omega} = \omega$. I.e. das Maximum liegt bei $\omega = \omega_0$, i.e. die Resonanzfrequenz liegt bei der Eigenfrequenz ω_0 des Systems. Dies ist anders als beim mechanischen System, bei welchem die Resonanzfrequenz bei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Delta^2}$ liegt (wobei $\Delta = \delta/m$ und wir mit δ den Reibungskoeffizienten und mit m die Masse bezeichnen).

Lösung 35. Die Summe der Spannungen in der Masche muss verschwinden, somit haben wir

$$LI' + RI + \frac{1}{C}Q = U.$$

Ableiten liefert

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = 0.$$

Die Anfangsbedingungen lauten $I(0) = 0$, $I'(0) = \frac{U}{L}$. Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist

$$I(t) = \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-50t}\sin(50\sqrt{3}t).$$

Wegen $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} I'(t) = 0$ folgt aus der ersten Gleichung die Beziehung $\lim_{t\to\infty} Q(t) = CU = \frac{1}{10}$.

Lösung 36.

(i) $y_i(x) = \frac{1}{9}e^{3x}$.

(ii) $u_i(x) = x + 1$.

(iii) Ohne Rechnung, direkt durch Superposition der Lösungen aus (i) und (ii): $y_i(x) = \frac{3}{9}e^{3x} + 2x + 2$.

Lösung 37.

(i) Die auf die Boye in vertikaler Richtung einwirkenden Kräfte sind die Gewichtskraft mg und die Auftriebskraft. Letztere wirkt vertikal nach oben und ihr Betrag ist gleich $A\rho g x(t)$. Das Newtonsche Gesetz $F = ma$ wird zu

$$mx'' = mg - A\rho g x,$$

i.e.

$$mx'' + A\rho g x = mg.$$

(ii) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$x_h(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t),$$

wobei wir

$$\omega = \sqrt{\frac{A\rho g}{m}}$$

gesetzt haben. Der Ansatz für die Lösung der inhomogenen Gleichung ist $x_i(t) = \tilde{C}$ (Polynom nullter Ordnung). Eingesetzt ergibt sich $\tilde{C} = m/(A\rho)$, i.e. die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{m}{A\rho}.$$

(iii) Aus $x(0) = C_1 + \frac{m}{A\rho} \overset{!}{=} 0$ folgt

$$C_1 = x_0 - \frac{m}{A\rho}.$$

Weiter folgt aus $x'(0) = C_2\omega \overset{!}{=} 0$ dass $C_2 = 0$. Somit lautet die partikuläre Lösung

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{m}{A\rho}\right) \cos(\omega t) + \frac{m}{A\rho}.$$

Lösung 38.

(i) Die Gleichung ist separierbar:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{1+y} &= \int dt \\ \log(1+y) &= t + C \\ y(t) &= Ce^t - 1.\end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ folgt $C = 2$ und somit

$$y(t) = 2e^t - 1.$$

(ii) Gleichung ist erster Ordnung. Die homogene Gleichung $y' + 4y = 0$ ist separierbar:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= -4 \int dt \\ \log(y) &= -4t + C \\ y_h(t) &= Ce^{-4t}.\end{aligned}$$

Variation der Konstanten ergibt den Ansatz $y_i(t) = \phi(t)e^{-4t}$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\phi' = 1$ und somit folgt $\phi(t) = t$ und $y_i(t) = te^{-4t}$. Daraus folgt die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_i(t) = Ce^{-4t} + te^{-4t}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ folgt $C = 2$ und somit

$$y(t) = e^{-4t}(2 + t).$$

(iii) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

mit Lösungen

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -4.$$

Somit ist die allgmeine Lösung

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}.$$

Die Anfangsbedingungen führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}C_1 + C_2 &= 1, \\ -C_1 - 4C_2 &= 0.\end{aligned}$$

Die Lösungen davon sind $C_1 = 4/3$, $C_2 = -1/3$. Somit haben wir

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}.$$

(iv) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

mit Lösungen

$$\lambda_\pm = \pm j.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t).$$

Der Ansatz für die inhomogene Lösung ist

$$y_i(t) = A \sin(2t) + B \cos(2t).$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$-4A \sin(2t) - 4B \cos(2t) + A \sin(2t) + B \cos(2t) = \cos(2t).$$

Für $t = 0$ verschwinden die sin-Terme und wir haben die Gleichung

$$-3B = 1.$$

Für $t = \ldots$ verschwinden die cos-Terme und wir haben die Gleichung

$$-3A = 0.$$

Somit folgt $A = 0$, $B = -1/3$ und wir haben

$$y_i(t) = -\frac{1}{3} \cos(2t).$$

Die allgemeine Lösung der inhomognenen Gleichung ist somit

$$y(t) = y_h(t) + y_i(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) - \frac{1}{3} \cos(2t).$$

Die Anfangsbedingungen führen auf

$$C_2 = 4/3, \qquad C_1 = -1.$$

Somit haben wir

$$y(t) = -\sin(t) + \frac{4}{3} \cos(t) - \frac{1}{3} \cos(2t).$$

Lösung 39.

(i) Die Geschwindigkeit über Grund ist die vektorielle Summe aus $\vec{v}_F$ und $\vec{v}_S$, i.e.

$$\vec{v}_{B,abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_B \\ v_F(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_B \\ v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Geschwindigkeit der Bahnkurve des Bootes über Grund. Die Steigung der Bahnkurve $y(x)$ ist somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_F(x)}{v_B} = \frac{v_0}{v_B} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Diese Differentialgleichung für $y(x)$ kann direkt integriert werden. Es ergibt sich

$$y(x) = \frac{v_0}{v_B} \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) + C.$$

Die Integrationskonstante bestimmt die Startposition (in y-Richtung) des Bootes. Somit kann $C = 0$ gesetzt werden.

(ii) Die Grösse b ist gegeben durch

$$b = y(a) - y(-a) = \frac{4}{3} \frac{v_0}{v_B} a$$

Lösung 40.

(i) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + \frac{F}{EI} = 0$ mit Lösung

$$\lambda_\pm = \sqrt{\frac{F}{EI}} j$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right).$$

(ii) Die Lösungen mit $y(0) = 0$ sind

$$y(x) = C \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

$(C = C_2)$.

(iii) Die Bedingung $y(L) = 0$ ist

$$y(L) = C \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) = 0.$$

Eine Lösung davon ist $C = 0$ und somit $y(x) \equiv 0$. Die zweite Möglichkeit ist

$$\sqrt{\frac{F}{EI}} L = k\pi.$$

Daraus folgt die Bedingung für die Kraft F

$$F = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 EI.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist konstant, abhängig von k. Der kleinste Wert von k ist $k = 1$. Somit kommt für eine Kraft

$$F < \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI$$

nur die erste Möglichkeit, i.e. $y(x) \equiv 0$ in Frage.

(iv) Die kleineste Kraft F_0 für eine Lösung welche nicht $y(x) \equiv 0$ ist, ist

$$F_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI.$$

(v) Die Lösung in der Figur entspricht

$$y(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

Somit gilt

$$\frac{2\pi}{L} = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

und wir haben

$$F = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 EI.$$

Lösung 41.

(i) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 8\lambda + 17$ besitzt die Nullstellen $\lambda_\pm = 4 \pm j$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = e^{4x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)).$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich die partikuläre Lösung

$$y(x) = e^{4x}(-4 \cos(x) + 15 \sin(x)).$$

(ii) Separieren der Variablen:

$$\frac{dy}{3y+2} = (x^2-4)dx.$$

Integration ergibt die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{Ce^{x^3-12x}-2}{3}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt die partikuläre Lösung

$$y(x) = \frac{5e^{x^3-12x}-2}{3}.$$

Lösung 42.

(i) Lösung der homogenen Gleichung (durch Separation) ist:

$$y_h(t) = \frac{C}{t^2}.$$

Ansatz mit Variation der Konstanten:

$$y_i(t) = \frac{\varphi(t)}{t^2}$$

eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$\varphi' = t^3 - t^2 + t$$

mit Lösung

$$\varphi(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}.$$

Somit ist die Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = \frac{C}{t^2} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$y(t) = \frac{1}{12t^2} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2}.$$

(ii) Charakteristisches Polynom ist $\lambda^2+8\lambda+17$ mit Nullstellen $\lambda_\pm = -4 \pm j$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = e^{-4t}\left(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)\right).$$

Einsetzen des Ansatzes $y_i(t) = Ce^{-3t}$ in die Differentialgleichung ergibt $C = 1$, i.e.

$$y_i(t) = e^{-3t}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_i(t) = e^{-4t}\left(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)\right) + e^{-3t}.$$

Mit den Randbedingungen folgt $C_1 = 1$ und $C_2 = -e^{\pi/2}$. Somit ist die partikuläre Lösung

$$y(t) = e^{-4t}\left(\cos(t) - e^{\pi/2}\sin(t)\right) + e^{-3t}.$$

Lösung 43.

(i) Das resultierende Drehmoment aus der Gravitationskraft ist

$$M = mgl\sin(\varphi) \approx mgl\varphi.$$

Somit wird die Differentialgleichung $M = I\ddot{\varphi}$ zu

$$mgl\varphi = ml^2\ddot{\varphi}, \qquad \text{i.e.} \qquad \ddot{\varphi} = \frac{g}{l}\varphi.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\varphi(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}.$$

Die Anfangbedingungen sind $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = v_0/l$. Daraus ergibt sich die partikuläre Lösung

$$\varphi(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \left(e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} \right).$$

(ii) Mit der Feder wird das resultierende Moment zu

$$M \approx mgl\varphi - \frac{kl^2}{4}\varphi = \left(mg - \frac{kl}{4} \right) l\varphi$$

und die Differentialgleichung ist

$$\ddot{\varphi} = \left(\frac{g}{l} - \frac{k}{4m} \right) \varphi.$$

Somit ist die Bedingung an die Federkonstante k, so dass Schwingungslösungen möglich sind

$$k > \frac{4gm}{l}$$

und die dazugehörige Frequenz ist

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{4m} - \frac{g}{l}}.$$

Lösung 44.

(i) Sei $V(t)$ das Volumen der Flüssigkeit im Behälter. Es gilt $V(t) = A_0 h(t)$ und somit haben wir

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(A_0 h(t)) = A_0 \frac{dh}{dt}(t).$$

Die Austrittsgeschwindigkeit von $v = \sqrt{2gh}$ ergibt nun eine Volumenänderung von

$$\frac{dV}{dt}(t) = -Av(t) = -A\sqrt{2gh(t)}.$$

Diese beiden Gleichungen ergeben die folgende Differentialgleichung für $h(t)$:

$$A_0 \frac{dh}{dt}(t) = -A\sqrt{2gh(t)}.$$

(ii) Die Gleichung ist separierbar. Separation der Variablen und Integration liefert die allgemeine Lösung

$$h(t) = \left(C - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2}}t \right)^2.$$

Zusammen mit der Bedingung $h(0) = H$ ergibt sich die partikuläre Lösung

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2}}t \right)^2.$$

(iii) Die Entleerungszeit t^* ergibt sich aus der Bedingung

$$h(t^*) = \left(\sqrt{H} - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2}}t^* \right)^2 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$t^* = \frac{A_0}{A}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

(iv) Die Masse der Flüssigkeit ist $m(t) = \rho V(t) = \rho A_0 h(t)$ (wobei wir mit ρ die Dichte der Flüssigkeit bezeichnen). Die Gleichung $F(t) = m(t)\frac{dv}{dt}(t)$ mit $F(t) =$ konst. $= F_0$ wird zu

$$\rho A_0 h(t)\frac{dv}{dt}(t) = F_0.$$

Einsetzen des Ausdruckes für $h(t)$ aus Teilaufgabe (ii) ergibt die Differentialgleichung

$$\rho A_0 \left(\sqrt{H} - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right)^2 \frac{dv}{dt}(t) = F_0.$$

Separation der Variablen führt auf

$$dv = \frac{F_0}{\rho A_0 H}\frac{1}{\left(1 - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2H}}t\right)^2}dt.$$

Verwenden der Konstanten

$$C_1 = \frac{F_0}{\rho A_0 H}, \qquad C_2 = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2H}}$$

vereinfacht die Gleichung zu

$$dv = \frac{C_1}{(1 - C_2 t)^2}dt.$$

Integration ergibt die allgemeine Lösung

$$v(t) = \frac{C_1}{C_2(1 - C_2 t)} + C.$$

Die Bedingung $v(0) = 0$ liefert die partikuläre Lösung

$$v(t) = \frac{C_1}{C_2}\left(\frac{1}{1 - C_2 t} - 1\right) = \frac{C_1 t}{1 - C_2 t}.$$

I.e.

$$v(t) = \frac{F_0 t}{\rho A_0 H\left(1 - \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{g}{2H}}t\right)}.$$

Lösung 45.

(i) Die Newtonsche Bewegungsgleichung $\vec{F} = m\vec{a}$ wird zu:

$$m\vec{r}'' + 2k\vec{r} = \vec{0}.$$

In Komponenten ist dies

$$mx'' + 2kx = 0,$$
$$my'' + 2ky = 0.$$

(ii) Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix}\sin(\omega_0 t) + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix}\cos(\omega_0 t).$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$.

(iii) Die partikuläre Lösung zu den gegebenen Anfangsbedingungen ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega_0 t) \\ \frac{b}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

(iv) Die Konstanten sind

$$A = a, \qquad B = \frac{b}{\omega_0}.$$

Lösung 46. Die allgemeine Lösung lautet

$$\overrightarrow{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Die partikuläre Lösung wird sich für $x \to \infty$ dem Ursprung annähern, falls $C_1 = 0$. Dies wird erreicht durch $\alpha = -\beta$.

Lösung 47. $\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{\alpha(x-x_0)}$.

Lösung 48. $\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} ae^{\alpha(x-x_0)} \\ be^{\beta(x-x_0)} \\ ce^{\gamma(x-x_0)} \end{pmatrix}$.

Lösung 49.

(i)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\dfrac{1}{2}y_1 + \dfrac{5}{2}y_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y}(3) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -8y_1 + 17y_2 - 3y_3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 17 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung 50.

(i) $\overrightarrow{y}(x) = \frac{9}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x}$, Sattelpunkt.

(ii) $\overrightarrow{y}(x) = \frac{13}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$, Sattelpunkt.

(iii) $\overrightarrow{y}(x) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4x} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x}$, Repeller.

(iv) $\overrightarrow{y}(x) = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$, Attraktor.

Lösung 51.

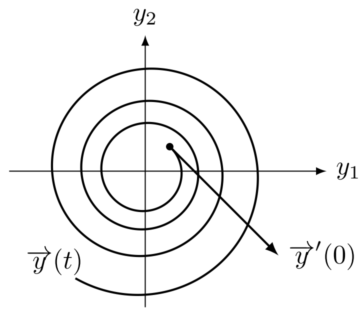
(i) Mit $y_1 = y$, $y_2 = y'$ folgt $y_1' = y_2$, $y_2' = y'' = 4y' - 5y$, i.e.

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ entsprechen $\overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dies entspricht den Koordinaten $(y_1, y_2) = (1, 1)$ im Phasenraum. Der Tangentialvektor an die Lösungskurve in diesem Punkt ist gegeben durch

$$\overrightarrow{y}'(0) = A\overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Eigenwerte der Matrix A sind $2 \pm j$. Der Realteil ist positiv, somit ist die Lösungskurve eine Spirale nach aussen. Aus (ii) folgt dass die Lösung sich im Uhrzeigersinn entwickelt. Das System ist instabil.



Lösung 52.

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\overrightarrow{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

(iii) $\alpha = \beta$ oder $\alpha = \frac{1}{2}\beta$

Lösung 53.

(i) Aus dem Maschensatz für die beiden Maschen folgt

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{R_1} = R_1 \tilde{I} = R_1(-I_1 - I_2), \\ U_1 &= U_2 + U_{R_2} = U_2 + R_2 I_2, \end{aligned}$$

wobei wir mit U_{R_i} die Spannung über den Widerstand R_i (von links nach rechts) und mit $\tilde{I}$ den Strom durch den Widerstand R_1 (von links nach rechts) bezeichnen. Für die dritte Gleichung in der ersten Zeile haben wir den Knotensatz für den linken mittleren Knoten verwendet. Die Kapazität eines Kondensators ist $C = Q/U$. Daraus folgt $U' = I/C$. Dies eingesetzt in die rechte Seite der obigen Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1(-C_1 U_1' - C_2 U_2'), \\ U_1 &= U_2 + R_2 C_2 U_2'. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$U_2' = \frac{1}{R_2 C_2}(U_1 - U_2).$$

Dies eingesetzt in der ersten Gleichung ergibt

$$U_1' = -\frac{1}{R_1 C_1} U_1 + \frac{1}{R_2 C_1}(U_2 - U_1).$$

(ii) Wir haben

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix}.$$

(iii) Die gegebenen Werte eingesetzt ergibt

$$A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_+ = -1/2$, $\lambda_- = -2$. Dazugehörige Eigenvektoren sind

$$\overrightarrow{f}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{f}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$\overrightarrow{U}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

(iv) Wir haben

$$\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Tangente gegeben durch

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

(v) Damit sich die Lösung auf einer Geraden befindet muss $\overrightarrow{U}(t)$ ein Vielfaches eines Eigenvektors sein. Das heisst entweder

$$\overrightarrow{U}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}, \qquad \text{daraus folgt} \qquad U_1(0) = \frac{1}{2}U_2(0),$$

oder

$$\overrightarrow{U}(t) = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \qquad \text{daraus folgt} \qquad U_1(0) = -U_2(0).$$

Lösung 54.

(i) Die Bewegungsgleichungen sind

$$\begin{aligned} Mx'' + b(x' - y') + kx &= 0, \\ my'' + b(y' - x') + ky &= 0. \end{aligned}$$

Die Matrix A in $\overrightarrow{z}' = A\overrightarrow{z}$ ist somit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} & 0 & \frac{b}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}.$$

Lösung 55.

(i) Das System wird durch zwei Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben:

$$M_i = I_i \ddot{\varphi}_i, \qquad i = 1, 2.$$

Für kleine Winkel φ_1, φ_2 kann angenommen werden dass die Feder horizontal wirkt und dass $\sin(\varphi_i) \approx \varphi_i$, $\cos(\varphi_i) \approx 1$. Somit sind die wirkenden Drehmomente gegeben durch

$$\begin{aligned} M_1 &= -l\varphi_1 m_1 g + \left(\frac{l}{2}\right)^2 k(\varphi_2 - \varphi_1), \\ M_2 &= -l\varphi_2 m_2 g - \left(\frac{l}{2}\right)^2 k(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Somit sind die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\frac{g}{l}\varphi_1 + \frac{k}{4m_1}(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 &= -\frac{g}{l}\varphi_2 - \frac{k}{4m_2}(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

(ii) Mit

$$z_1 = \varphi_1, \qquad z_2 = \dot{\varphi}_1, \qquad z_3 = \varphi_2, \qquad z_4 = \dot{\varphi}_2$$

folgt

$$\dot{\overrightarrow{z}} = A\overrightarrow{z},$$

mit

$$\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{l} - \frac{k}{4m_1} & 0 & \frac{k}{4m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{4m_2} & 0 & -\frac{g}{l} - \frac{k}{4m_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Numerische Methoden

4.1. **Richtungsfeld.** Für eine Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

ist die Steigung der Lösungskurve im Punkt (x, y) gegeben durch

$$m = \frac{dy}{dx}(x) = f(x,y).$$

Somit ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

parallel zur Lösungskurve im Punkt (x, y). Das Richtungsfeld ergibt sich durch zeichnen von obigen Vektoren im betrachteten Bereich. Der Befehl `quiver` kann dazu benutzt werden.

Als Beispiel betrachten wir das Problem des logistischen Wachstums. Die Differentialgleichung ist

$$\frac{dN}{dt}(t) = N(t)(1 - N(t)),$$

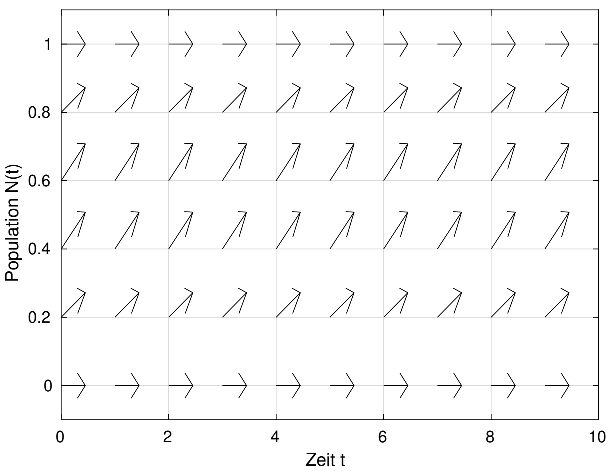
wobei $N(t)$ die Grösse der Population zur Zeit t beschreibt (und alle auftretenden Proportionalitätskonstanten gleich Eins gesetzt sind). Das Richtungsfeld ist bis auf Skallierung gegeben durch das Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} 1 \\ N(1-N) \end{pmatrix}$$

Das folgende Programm erzeugt ein Richtungsfeld im Bereich $0 \le t \le 10$, $0 \le N(t) \le 1$:

Matlab

```
t=linspace(0,10,11);N=linspace(0,1,6);
[t,N]=meshgrid(t,N);
f_t=ones(size(t));f_N=N.*(1-N);
figure(1);clf
quiver(t,N,f_t,f_N,0.5)
xlabel('Zeit t');ylabel('Population N(t)');axis([0 10 -.1 1.1])
grid on
```



4.2. **Lösung einer Differentialgleichung.** Wir betrachten Anfangswertprobleme der Form

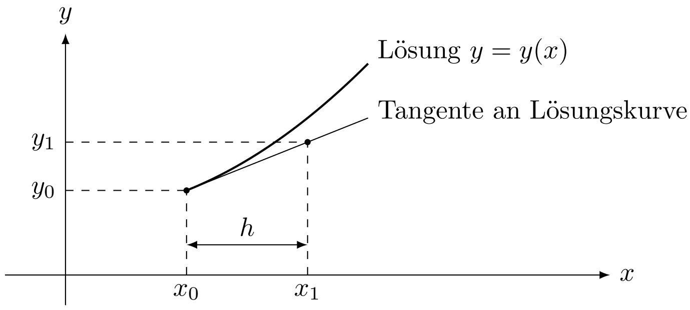
$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

und suchen eine Lösung $y(x)$ für $x \in [x_0, b]$. Dazu unterteilen wir das Intervall $[x_0, b]$ in n Teile der Länge $h = \frac{b-x_0}{n}$. Diese Länge heisst *Schrittweite*. Ausgehend vom Punkt

(x_0, y_0) folgen wir nun der Richtung im Richtungsfeld, so dass wir in x-Richtung die Distanz h zurücklegen und erreichen somit den Punkt (x_1, y_1), wobei

$$x_1 = x_0 + h, \qquad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Das heisst wir haben in x-Richtung die Distanz h und in y-Richtung die Distanz $hf(x_0, y_0)$ zurückgelegt.



Für kleine Schrittweite h ist y_1 eine Approximation für die Lösung $y(x_1)$, i.e.

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Dies ist analog zur Linearisierung der Funktion $y(x)$ im Punkt (x_0, y_0). Nun wird vom Punkt (x_1, y_1) aus ein weiterer Schritt ausgeführt. Dieser Schritt führt auf den Punkt (x_2, y_2):

$$x_2 = x_1 + h, \qquad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Fahren wir in diesem Sinne weiter, so erhalten wir die induktive Vorschrift für das Auffinden des Punktes mit Koordinaten (x_k, y_k):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h, \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Lösung nur an diskreten Punkten. Wird ein Wert zwischen zwei Punkten benötigt, so muss interpoliert werden. Somit liefert die stückweise gerade Kurve

$$(x_0, y_0) - (x_1, y_1) - (x_2, y_2) - \ldots - (x_n, y_n),$$

eine Approximation der Lösungskurve $y(x)$. Man nennt die obige Vorschrift *Methode von Euler*. Charakteristisch für diese Methode ist dass für die Richtung im Richtungsfeld in jedem Schritt nur der Wert an einer Stelle (dem vorhergehenden Punkt) verwendet wird. Es ist offensichtlich dass die Approximation je besser wird, desto kleiner die Schrittweite h gewählt wird.

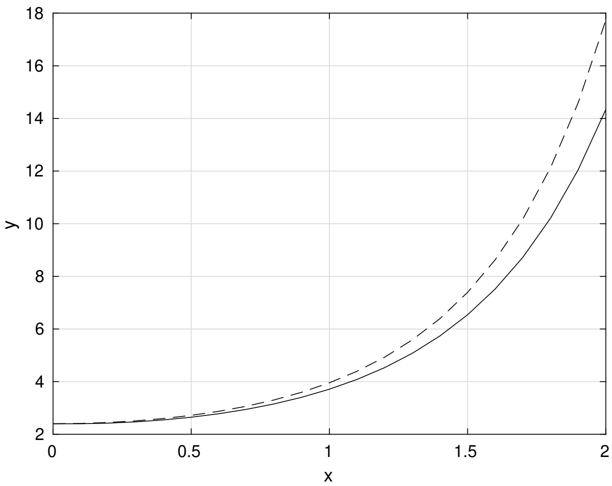
Als Anwendungsbeispiel der Methode von Euler suchen wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = xy, \\ y(0) = 2.4 \end{cases}$$

für $x \in [0, 2]$. Das folgende Programm löst dieses Problem numerisch mit 20 Schritten (i.e. mit einer Schrittweite von $h = 2/20$) und vergleicht die erhaltene approximative Lösung mit der analytischen Lösung $y(x) = 2.4e^{\frac{x^2}{2}}$ (gestrichelt):

Matlab

```
f=@(x,y)x*y;
x0=0;y0=2.4;
b=2;n=20;h=(b-x0)/n;
x=x0:h:b;y=ones(size(x));y(1)=y0;
for k=1:n
    y(k+1)=y(k)+h*f(x(k),y(k));
end
y_an=2.4*exp(x.^2/2);
plot(x,y,x,y_an,'--');
xlabel('x');ylabel('y');grid on;
```



Eine Erweiterung der Methode von Euler ist die *Methode von Heun.* In dieser Methode wird die Steigung der Tangente an die Lösungskurve als Mittelwert der Steigungen an den Punkten (x_k, y_k) und (x_{k+1}, y^*_{k+1}) berechnet, wobei die y^*_{k+1}-Koordinate der y_{k+1}-Koordinate des Punktes nach der Methode von Euler entspricht. Es ergibt sich die Vorschrift

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + h,\\
y^*_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k),\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\Big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})\Big), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 56. Man ändere das Programm des Anwendungsbeispiels der Methode von Euler so ab, dass es einer Implementierung der Methode von Heun entspricht und bestimme die Abweichungen von $y(2)$ der beiden Approximationen (Euler und Heun) von der analytischen Lösung.

Eine weitere Verfeinerung der Methode von Heun ist die *Methode von Runge und Kutta.* In dieser Methode wird die Steigung des Richtungsfeldes an vier verschiedenen Stellen berechnet und gewichtet:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= f(x_k, y_k),\\
\lambda_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\lambda_1\right),\\
\lambda_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\lambda_2\right),\\
\lambda_4 &= f(x_k + h, y_k + h\lambda_3),\\
x_{k+1} &= x_k + h,\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{3}\Big(\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{\lambda_4}{2}\Big), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 57. Man ändere das Programm des Anwendungsbeispiels der Methode von Euler so ab, dass es einer Implementierung der Methode von Runge und Kutta entspricht und bestimme die Abweichung von $y(2)$ der Approximation von der analytischen Lösung.

Aufgabe 58. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = -x,\\ x(0) = 1 \end{cases}$$

für $t \in [0, 1]$ mit einem Zeitschritt von $h = 0.1$. Man bestimme die Abweichungen der numerischen Approximationen nach Euler, Heun und Runge/Kutta zur analytischen Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$.

Die Methode nach Runge und Kutta ist in der Praxis die am weitesten verbreitete Methode. In Matlab implementiert ist eine weitere Verfeinerung davon (Schrittweitenanpassung,...). Sie wird mit dem Befehl `ode45` aufgerufen. Das folgende Programm löst das Anfangswertproblem $y' = xy$, $y(0) = 2.4$ für $x \in [0, 2]$ mit diesem Befehl:

Matlab
```
x=linspace(0,2);y0=2.4;
[x,y1]=ode45(@(x,y)x*y,x,y0);
```

Bemerkung: Die Argumente von `ode45(...)` sind die Funktion $f(x, y)$ aus der Differentialgleichung, die betrachteten x-Werte und die Anfangsbedingung y_0. Die Lösung wird im Vektor `y1` gespeichert. Somit kann die Lösung mit `plot(x,y1)` gezeichnet werden.

Im folgenden soll, wenn nichts anderes vermerkt wird, jeweils der Befehl `ode45` für das Lösen von Differentialgleichungen verwendet werden.

Aufgabe 59. Wir betrachten die logistische Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt}(t) = N(t)(1 - N(t)).$$

Man schreibe ein Matlabprogramm, welches das Richtungsfeld, zusammen mit den Lösungen zu den Anfangsbedingungen $N(0) = 0.01, 0.3, 1.1$ zeichnet.

4.3. **Systeme von Differentialgleichungen, Gleichungen höherer Ordnung.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

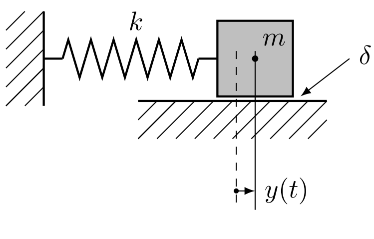
$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y}), \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0, \end{cases}$$

wobei

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \vec{y}) \\ f_2(t, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \vec{y}) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Für ein lineares homogenes Gleichungssystem erster Ordnung (siehe Seite 27) kann die rechte Seite der Differentialgleichung geschrieben werden als $\vec{f}(t, \vec{y}) = A\vec{y}$ mit einer konstanten Matrix A.

Der Befehl `ode45` kann auch für Systeme verwendet werden. Wir illustrieren an einem Beispiel: Wir betrachten das mechanische System:



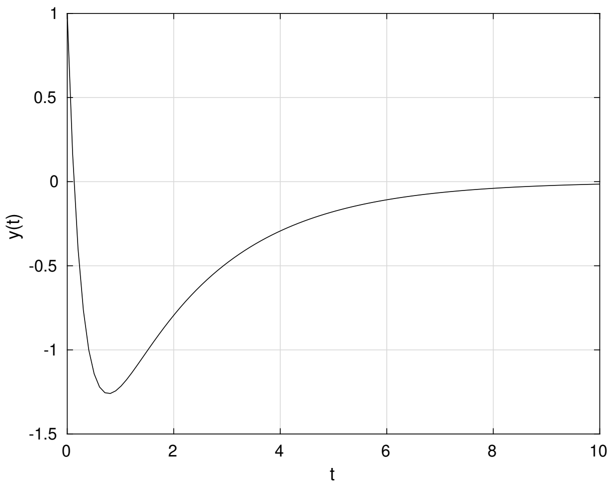
Die Masse sei $m = 4$, der Reibungskoeffizient sei $\delta = 16$ und die Federkonstante sei $k = 7$. Wir bezeichnen mit $y(t)$ die Auslenkung aus der (gestrichelt eingezeichneten) Ruhelage. Alle Angaben sind in SI-Grundeinheiten. Wir schreiben die Differentialgleichung zweiter Ordnung um auf ein System erster Ordnung. Mit $y_1 = y$, $y_2 = y'$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -4y_2 - \frac{7}{4}y_1 \end{pmatrix}.$$

Das folgende Programm löst diese Differentialgleichung für $t \in [0, 10]$ mit Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = -10$:

Matlab

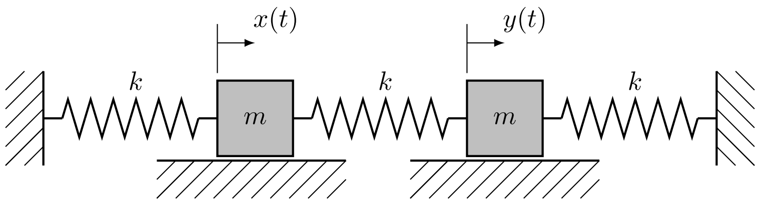
```
t=linspace(0,10);
[t1,y1]=ode45(@(t,y)[y(2) -4*y(2)-(7/4)*y(1)]',t,[1;-10]);
plot(t1,y1(:,1));
xlabel('t');ylabel('y(t)');grid on;
```



Bemerkung: Im Befehl `ode45(...)` steht nun eine vektorwertige Funktion und die Anfangsbedingungen sind im Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$ enthalten. Die Lösung $\overrightarrow{y}(t)$ wird in der Matrix `y1` gespeichert. Die erste Spalte `y1(:,1)` entspricht $y_1(t)$, die zweite Spalte entspricht $y_2(t)$.

Aufgabe 60. Man betrachte das obige mechanische System mit Feder, Masse und Reibung. Die Masse sei $m = 4$ und der Reibungskoeffizient sei $\delta = 16$. Man bestimme die Federkonstante k^* für kritische Dämpfung und zeichne den zeitlichen Verlauf der Auslenkung für die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = -10$, jeweils für ein System mit k^*, $10k^*$ und $\frac{1}{10}k^*$ als Federkonstante.

Aufgabe 61. Wir betrachten das folgende mechanische System:



Die beiden Massen liegen reibungsfrei auf der Unterlage. $x(t)$, $y(t)$ sind die Auslenkungen aus den Ruhelagen. Die Bewegungsgleichungen für $x(t)$, $y(t)$ sind

$$\begin{cases} mx'' = -2kx + ky, \\ my'' = -2ky + kx. \end{cases}$$

(i) Man schreibe diese Gleichungen in Form eines Gleichungssystems erster Ordung. Dazu führe man die Funktionen

$$x_1 = x, \qquad x_2 = x', \qquad y_1 = y, \qquad y_2 = y'$$

ein und finde die Matrix A in $\overrightarrow{z}' = A\overrightarrow{z}$, wobei

$$\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Man löse das System numerisch mit $m = k = 1$ und den Anfangsbedingungen

$$\overrightarrow{z}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.7 \\ 0.3 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

und zeichne die Lösung $x(t)$, $y(t)$.

(iii) Man zeichne den zeitlichen Verlauf des Schwerpunktes des Systems, i.e. man zeichne

$$s(t) = \frac{x(t) + y(t)}{2}.$$

(iv) Man zeichne eine Serie von Plots um die Lage der Massen und des Schwerpunktes in Abhängigkeit der Zeit zu veranschaulichen. Hinweis: Mit dem Befehl `pause(t)` kann die Ausführung von Matlab um t Sekunden gestoppt werden.

Lösung 56. Die for-Schlaufe wird zu

Matlab

```
for k=1:n
    y_star=y(k)+h*f(x(k),y(k));
    y(k+1)=y(k)+(h/2)*(f(x(k),y(k))+f(x(k+1),y_star));
end
```

Die Abweichungen betragen

$$y_{\text{Euler}}(2) - y(2) = -3.3980, \qquad y_{\text{Heun}}(2) - y(2) = -0.1085.$$

Lösung 57. Die for-Schlaufe wird zu

Matlab

```
for k=1:n
    l1=f(x(k),y(k));
    l2=f(x(k)+h/2,y(k)+(h/2)*l1);
    l3=f(x(k)+h/2,y(k)+(h/2)*l2);
    l4=f(x(k)+h,y(k)+h*l3);
    y(k+1)=y(k)+(h/3)*(l1/2+l2+l3+l4/2);
end
```

Die Abweichung beträgt

$$y_{\text{Runge/Kutta}}(2) - y(2) = -1.406 \cdot 10^{-4}.$$

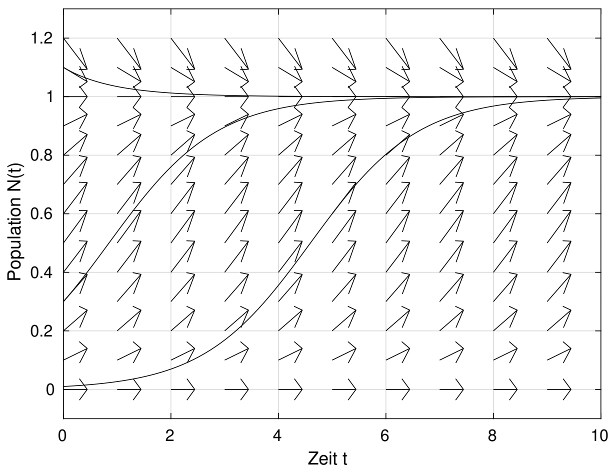
Lösung 58. Die Abweichungen betragen

$$\begin{aligned} x_{\text{Euler}}(1) - x(1) &= -0.0192, \\ x_{\text{Heun}}(1) - x(1) &= 6.615 \cdot 10^{-4}, \\ x_{\text{Runge/Kutta}}(1) - x(1) &= 3.332 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

Lösung 59.

Matlab

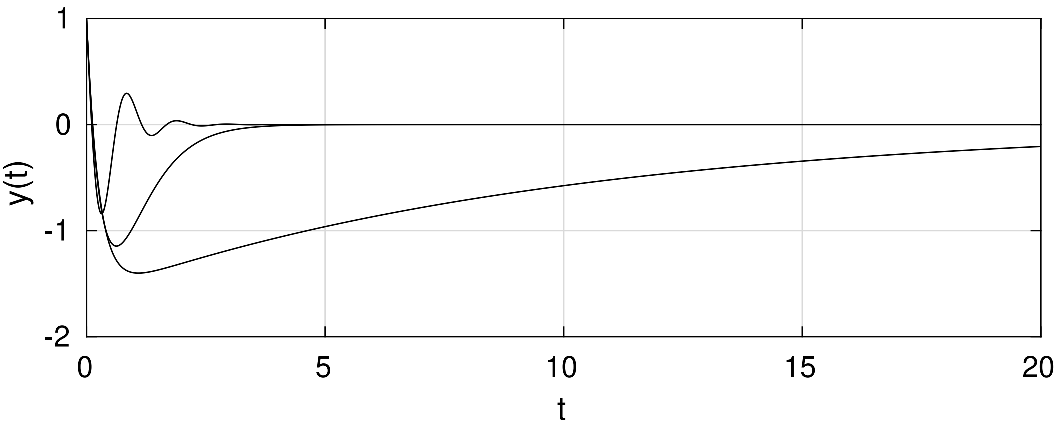
```
t=linspace(0,10,11);N=linspace(0,1.2,13);
[t,N]=meshgrid(t,N);
f_t=ones(size(t));f_N=N.*(1-N);
figure(1);clf
quiver(t,N,f_t,f_N,0.5)
xlabel('Zeit t');ylabel('Population N(t)');axis([0 10 -.1 1.3])
grid on
[t1,N1]=ode45(@(t,N)N.*(1-N),linspace(0,10),0.3);
[t2,N2]=ode45(@(t,N)N.*(1-N),linspace(0,10),1.1);
[t3,N3]=ode45(@(t,N)N.*(1-N),linspace(0,10),0.01);
hold on
plot(t1,N1,t2,N2,t3,N3)
```



Lösung 60.

Matlab

```
t=linspace(0,20,1000);
for k=[1.6 16 160]
   [t1,y1]=ode45(@(t,y)[y(2) -4*y(2)-(k/4)*y(1)]',t,[1;-10]);
   plot(t1,y1(:,1),'Color',[0 0 0]);hold on
end
xlabel('t');ylabel('y(t)');grid on;
pbaspect([3 1 1])
```



Lösung 61.

(i) Wir haben

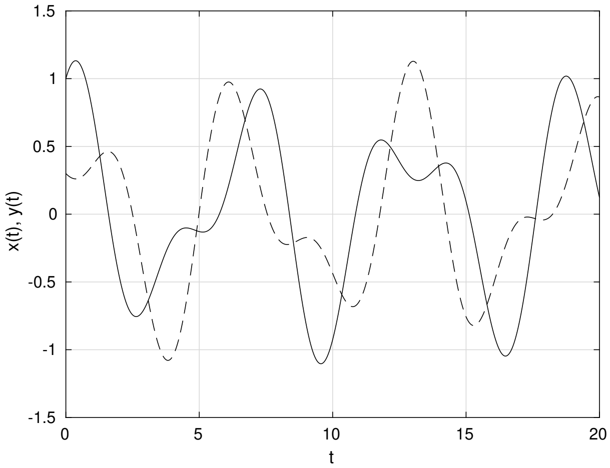
$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = -\dfrac{2k}{m}x + \dfrac{k}{m}y = -\dfrac{2k}{m}x_1 + \dfrac{k}{m}y_1 \\ y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = -\dfrac{2k}{m}y + \dfrac{k}{m}x = -\dfrac{2k}{m}y_1 + \dfrac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

I.e. die Matrix A in $\overrightarrow{z}' = A\overrightarrow{z}$ ist

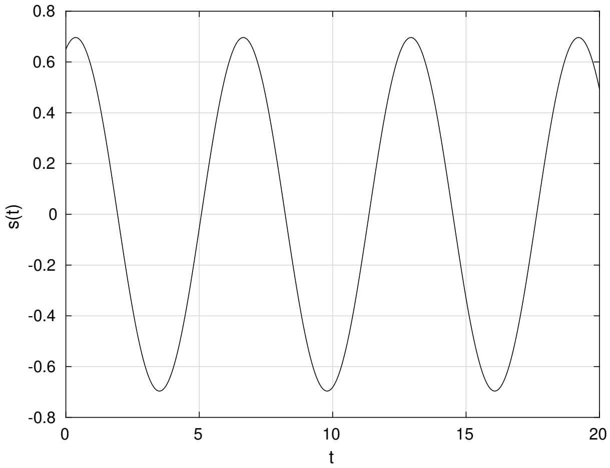
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 0 & -\frac{2k}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Matlab

```
t=linspace(0,20,1000);k=1;m=1;
A=[0 1 0 0;-2*k/m 0 k/m 0;0 0 0 1;k/m 0 -2*k/m 0];
[t1,y1]=ode45(@(t,y)A*y,t,[1;0.7;0.3;-.2]);
plot(t1,y1(:,1),'Color',[0 0 0]);hold on
plot(t1,y1(:,3),'--','Color',[0 0 0]);
xlabel('t');ylabel('x_1(t),x_2(t)');grid on;
```



(iii)



(iv) Das folgende Programm zeigt die Bewegung der Massen in Abhähngigkeit der Zeit:

Matlab

```
ys=(y1(:,1)+y1(:,3))/2;
for k=1:length(t)
    plot(y1(k,1)-1,0,'-s',y1(k,3)+1,0,'-s',ys(k),0,'+','MarkerSize',10)
    axis([-3 3 -.3 .3]);
    yticks([]);xticks([-1 1]);xticklabels({'x=0','y=0'});grid on;
    daspect([1 1 1]);
    pause(0.001)
end
```

6. Laplacetransformation

6.1. Definition. Sei $f(t)$ gegeben. Die Funktion

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

heisst *Laplacetransformation* der Funktion $f(t)$. Symbolisch schreiben wir[4]

$$F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right), \qquad \text{oder} \qquad f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)\ .$$

Wir nennen $f(t)$ die *Originalfunktion* und $F(s)$ die *Bildfunktion.* In Anwendungen ist t oft die Zeit und $f(t)$ beschreibt eine zeitabhängige Grösse. In diesem Fall wird $f(t)$ auch *Zeitfunktion* genannt.

Bemerkung: Im allgemeinen ist $s \in \mathbb{C}$.

6.2. Erste Beispiele. Unter der provisorischen Annahme dass $s \in \mathbb{R}$ berechnen wir erste Beispiele von Transformationen.

(i) Sei $f(t) = 1$. Dann haben wir

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt.$$

Für die weiteren Berechnungen in diesem Beispiel unterscheiden wir die Fälle $s = 0$ und $s \neq 0$. Im Fall $s = 0$ haben wir

$$F(0) = \int_0^\infty e^{-0}dt = \int_0^\infty dt$$

und somit existiert $F(s) = \mathcal{L}(1)$ für $s = 0$ nicht. Im Fall $s \neq 0$ haben wir

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt &= \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{s}e^{-sT}\Big|_0^T \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1-e^{-sT}}{s}. \end{aligned}$$

Gilt nun $s > 0$ so haben wir

$$F(s) = \frac{1}{s}.$$

Gilt aber $s < 0$ so haben wir

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} = \infty$$

und in diesem Fall existiert $F(s) = \mathcal{L}(1)$ auch nicht. Wir finden also

$$\mathcal{L}(1) = \begin{cases} \frac{1}{s} & s > 0, \\ \text{nicht definiert} & s \leq 0. \end{cases}$$

(ii) Sei $f(t) = t$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt &= \int_0^\infty te^{-st}dt \\ &= -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Zeile partielle Integration verwendet haben. Das verbleibende Integral ist gleich $\mathcal{L}(1)$ und existiert somit nur für $s > 0$. In diesem Fall verschwindet der erste Term und wir finden somit

$$\mathcal{L}(t) = \begin{cases} \frac{1}{s^2} & s > 0, \\ \text{nicht definiert} & s \leq 0. \end{cases}$$

[4] In der Literatur wird oft auch die Notation (mit geschweiften Klammern) $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ verwendet.

(iii) Sei $f(t) = e^{at}$. Dann haben wir

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt$$
$$= \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\Big|_0^\infty.$$

Dieser Ausdruck existiert nur falls $a < s$. Wir finden also

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & a < s, \\ \text{nicht definiert} & a \geq s. \end{cases}$$

6.3. **Konvergenzbereich.** In diesem Teilabschnitt widmen wir uns den Fragen:

(i) Für welche Funktionen $f(t)$ exisitiert eine Laplacetransformation?
(ii) Wie sieht der Definitionsbereich von $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ aus, i.e. für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $F(s)$?

Wir illustrieren die Ideen zuerst an den bereits besprochenen Beispielen $f(t) = 1$ und $f(t) = e^{at}$ indem wir die Annahme $s \in \mathbb{R}$ weglassen.

Sei $f(t) = 1$. Wir haben

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1-e^{-sT}}{s}.$$

Wir schreiben $s = \alpha + j\beta$ (mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Wir haben

$$e^{-sT} = e^{-(\alpha+j\beta)T} = e^{-\alpha T}e^{-j\beta T}$$
$$= e^{-\alpha T}(\cos(-\beta T) + j\sin(-\beta T)).$$

Der Faktor $\cos(-\beta T) + j\sin(-\beta T)$ befindet sich in der komplexen Ebene auf dem Einheitskreis und der Betrag davon ist somit konstant. Für den reellen Vorfaktor $e^{-\alpha T}$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\alpha T} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0, \\ 1 & \alpha = 0, \\ \infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

und wir finden

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}(s) > 0, \\ \text{nicht definiert} & \mathrm{Re}(s) \leq 0. \end{cases}$$

I.e. die Laplacetransformation von $f(t) = 1$ mit der Angabe des Definitionsbereichs $H \subset \mathbb{C}$ ist

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \qquad H = \{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 0\}.$$

Der Konvergenzbereich entspricht der komplexen rechten Halbene (ohne die Gerade $\mathrm{Re}(s) = 0$).

Als nächstes betrachten wir $f(t) = e^{at}$. Wir haben

$$F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1-e^{(a-s)T}}{s-a}.$$

Für Konvergenz benötigen wir $\mathrm{Re}(a-s) < 0$. Somit ist die Laplacetransformation von $f(t) = e^{at}$ mit der Angabe des Definitionsbereichs $H \subset \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}, \qquad H = \{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)\}.$$

Im folgenden verallgemeinern wir die Betrachtung. Dazu benötigen wir *Funktionen exponentieller Ordnung*. Eine Funktion $f(t)$ ist von exponentieller Ordnung, falls es Konstanten a, M gibt, so dass

$$|f(t)| \leq Me^{at}.$$

I.e. eine Funktion $f(t)$ ist von exponentieller Ordnung falls sie höchstens exponentiell wächst. Wir nennen das kleinste a für welches die obige Ungleichung gilt die *exponentielle Ordnung* von $f(t)$. Beispiele sind:

Funktion	Exponentielle Ordnung
$f(t) = 1$	0
$f(t) = \cos(\omega t)$	0
$f(t) = \sin(\omega t)$	0
$f(t) = e^{bt}$	b

Ein Gegenbeispiel für eine Funktion welche nicht von exponentieller Ordnung ist, ist

$$f(t) = e^{t^2}$$

(diese Funktion wächst 'zu schnell').

Theorem 6.1. *Für $f(t)$ von exponentieller Ordnung a konvergiert die Laplacetransformation $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > a$.*

Beweis: Wir nehmen an dass $f(t)$ von exponentieller Ordnung ist, i.e. $|f(t)| \leq Me^{at}$ und dass sich s im Definitionsbereich befindet, i.e. $\mathrm{Re}(s) > a$. Nun ist zu zeigen dass die Laplacetransformation existiert. Da $\mathrm{Re}(s) > a$, lässt sich s schreiben als $s = (a+\alpha)+jb$ mit $\alpha > 0$. Wir haben

$$\begin{aligned} f(t)e^{-st} \leq |f(t)e^{-st}| &= \left|f(t)e^{-(a+\alpha)t}e^{-jbt}\right| \\ &= \left|f(t)e^{-(a+\alpha)t}\right| \\ &= |f(t)| \left|e^{-(a+\alpha)t}\right| \\ &\leq Me^{at}e^{-(a+\alpha)t} \\ &= Me^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile verwendet haben dass $|e^{-jbt}| = 1$. Die Transformation ist gegeben durch

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Wegen obiger Ungleichung ist aber die Funktion welche integriert wird im Betrag von oben beschränkt durch eine Funktion welche integrierbar ist und somit selbst integrierbar. I.e. die Transformation von $f(t)$ existiert, i.e. $\mathcal{L}(f(t))$ konvergiert.

Bemerkungen:

(i) Alle von uns in dieser Vorlesung betrachteten Funktionen sind von exponentieller Ordnung und besitzen somit eine Laplacetransformation.
(ii) In den Anwendungen spielt t meistens die Rolle der Zeit. Da der Exponent im Ausdruck e^{-st} dimensionslos sein muss, spielt s die Rolle einer (komplexen) Frequenz.
(iii) a wird auch *Konvergenzabszisse* genannt.

6.4. **Linearität und trigonometrische Funktionen.**

Theorem 6.2 (Linearität). *Seien C_1, C_2 Konstanten und $f_1(t)$, $f_2(t)$ gegebene Funktionen. Dann gilt*

$$\mathcal{L}(C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)) = C_1 \mathcal{L}(f_1(t)) + C_2 \mathcal{L}(f_2(t)),$$

i.e. die Laplacetransformation ist linear.

Der Beweis folgt direkt aus der Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)) &= \int_0^\infty (C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t))e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty C_1 f_1(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty C_2 f_2(t)e^{-st}dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1 \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + C_2 \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt. \\
&= C_1\mathcal{L}\left(f_1(t)\right) + C_2\mathcal{L}\left(f_2(t)\right).
\end{aligned}
$$

Somit kann bei Summen gliedweise transformiert werden. Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(7+3t\right) &= \mathcal{L}\left(7\right) + \mathcal{L}\left(3t\right) \\
&= 7\mathcal{L}\left(1\right) + 3\mathcal{L}\left(t\right) \\
&= \frac{7}{s} + \frac{3}{s^2}.
\end{aligned}
$$

Wir bestimmen die Transformation der trigonometrischen Funktionen $\sin(t)$, $\cos(t)$. Dazu verwenden wir

$$
\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}, \qquad \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}.
$$

Wir haben

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\cos(t)\right) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left(e^{jt}\right) + \mathcal{L}\left(e^{-jt}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j}\right) \\
&= \frac{s}{s^2+1},
\end{aligned}
$$

wobei wir in der ersten Zeile Linearität und für die zweite Zeile die Transformation $\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}$ verwendet haben. Analog zu dieser Rechnung findet man die Transformation von $\sin(t)$. Wir haben

$$
\mathcal{L}\left(\sin(t)\right) = \frac{1}{s^2+1}, \qquad \mathcal{L}\left(\cos(t)\right) = \frac{s}{s^2+1}.
$$

6.5. **Transformation von $f(t) = t^n$.** Wir haben bereits gesehen

$$
\mathcal{L}\left(1\right) = \frac{1}{s}, \qquad \mathcal{L}\left(t\right) = \frac{1}{s^2}.
$$

Sei $f(t) = t^2$. Wir haben

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(t^2\right) &= \int_0^\infty t^2 e^{st}dt \\
&= -\frac{t^2}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}dt \\
&= \frac{2}{s}\mathcal{L}\left(t\right) \\
&= \frac{2}{s^3}.
\end{aligned}
$$

Man beachte den Ausdruck in der zweitletzten Zeile, i.e. man beachte dass gilt

$$
\mathcal{L}\left(t^2\right) = \frac{2}{s}\mathcal{L}\left(t\right).
$$

Sei nun $f(t) = t^3$. Wir haben

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(t^3\right) &= \int_0^\infty t^3 e^{st}dt \\
&= -\frac{t^3}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{3}{s}\int_0^\infty t^2e^{-st}dt \\
&= \frac{3}{s}\mathcal{L}\left(t^2\right) \\
&= \frac{6}{s^4}.
\end{aligned}
$$

Man beachte auch hier den Ausdruck in der zweitletzten Zeile, i.e. man beachte dass gilt

$$\mathcal{L}\left(t^3\right) = \frac{3}{s}\mathcal{L}\left(t^2\right).$$

Analog findet man für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}\left(t^n\right) = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\right).$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(t^n\right) &= \frac{n}{s}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\right)\\ &= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\mathcal{L}\left(t^{n-2}\right)\\ &= \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}\underbrace{\mathcal{L}\left(1\right)}_{=\frac{1}{s}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

6.6. **Ähnlichkeit und Dämpfung.**

Theorem 6.3 (Ähnlichkeit)**.** *Sei $f(t)$ eine gegebene Funktion, $a > 0$ eine Konstante und sei $F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}\left(f(at)\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Der Beweis beruht auf der Substitution $u = at$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(f(at)\right) &= \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt\\ &= \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{su}{a}}du}_{=F\left(\frac{s}{a}\right)}\\ &= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).\end{aligned}$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Transformation von $\cos(\omega t)$. Wir haben $f(t) = \cos(t)$ und aus

$$F(s) = \mathcal{L}\left(\cos(t)\right) = \frac{s}{s^2+1}$$

folgern wir durch Ähnlichkeit

$$\mathcal{L}\left(\cos(\omega t)\right) = \frac{1}{\omega}F\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Theorem 6.4 (Dämpfung)**.** *Sei $f(t)$ eine gegeben Funktion, a eine Konstante und sei $F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right) = F(s+a).$$

Der Beweis ist die Rechnung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right) &= \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt\\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-(a+s)t}dt\\ &= F(s+a).\end{aligned}$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Transformation von $e^{-3t}\sin(t)$. Wir haben $f(t) = \sin(t)$ und aus

$$F(s) = \mathcal{L}\left(\sin(t)\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

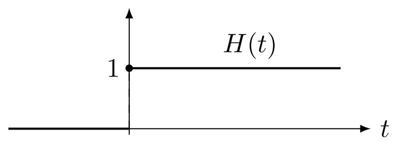
folgern wir

$$\mathcal{L}\left(e^{-3t}\sin(t)\right) = F(s+3)$$

$$= \frac{1}{(s+3)^2+1}.$$

6.7. **Die Heavisidefunktion.** Die *Heavisidefunktion* $H(t)$ ist definiert durch

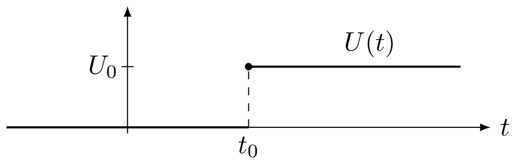
$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$



In Anwendungen wird diese Funktion meist verwendet um das (idealisierte) Einschalten (oder Ausschalten) eines Signals oder einer Störung zu modellieren. Beispielsweise kann eine Gleichspannung U_0, welche zum Zeitpunkt $t = t_0$ eingeschaltet wird durch die Funktion

$$U(t) = U_0 H(t - t_0)$$

modelliert werden:



Bemerkungen:

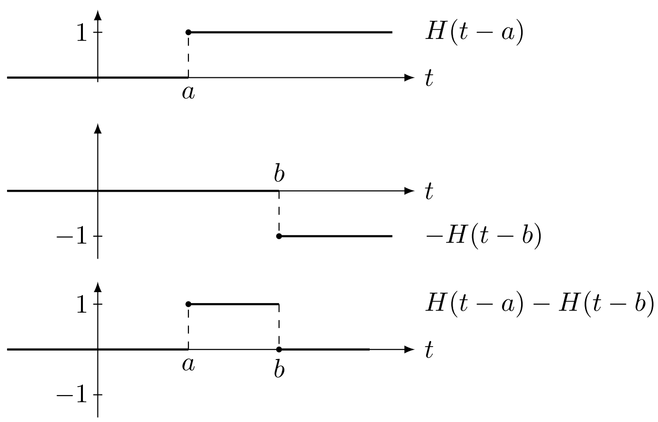
(i) In der Realität ändern Grössen meistens nicht sprungartig sondern stetig. Trotzdem liefert die Heavisidefunktion in vielen Fällen eine gute Approximation.

(ii) In der Literatur wird für die Heavisidefunktion $H(t)$ oft auch die Notation $\theta(t)$ und der Name *Thetafunktion*, *Sprungfunktion* oder *Schrittfunktion* verwendet.

(iii) Oft wird beim Zeichnen des Graphen der Heavisidefunktion kein Unterschied zwischen den gestrichelten und ausgezogegenen Teilen gemacht, i.e. der ganze Graph wird mit ausgezogenen Geradenstücken gezeichnet.

Mit der Heavisidefunktion lässt sich die folgende *Fensterfunktion* zusammensetzen (wir setzen voraus dass $a < b$):

$$f(t) = H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 0 & t < a, \\ 1 & a \leq t < b, \\ 0 & b \leq t. \end{cases}$$



Als Beispiel für die Anwendung der Heavisidefunktion schreiben wir die stückweise definierte Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ t & 0 \leq t < 1, \\ t^2 & 1 \leq t \end{cases}$$

als

$$f(t) = t\big(H(t) - H(t-1)\big) + t^2 H(t-1).$$

6.8. **Zeitverschiebung.**

Theorem 6.5 (Zeitverschiebung)**.** *Sei $f(t)$ gegeben, sei $a > 0$ eine Konstante und sei $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s).$$

Der Beweis beruht auf der Substitution $u = t - a$:

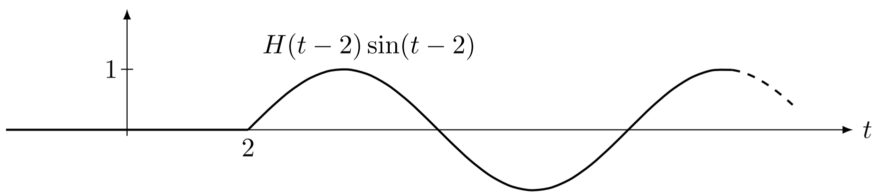
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a)) &= \int_0^\infty H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}du \\
&= e^{-as}\underbrace{\int_0^\infty f(u)e^{-su}du}_{=F(s)} \\
&= e^{-as}F(s).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für die Laplacetransformation einer Funktion $f(t)$ ist nur das Verhalten der Funktion für $t \geq 0$ relevant, da die Transformation durch ein Integral gegeben ist, dessen untere Integrationsgrenze $t = 0$ entspricht. Somit gilt

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(H(t)f(t))$$

und die Funktion $H(t-a)f(t-a)$ entspricht in der Tat der zeitlichen Verschiebung von $H(t)f(t)$.

Als Beispiel betrachten wir die Transformation von $H(t-2)\sin(t-2)$. Es handelt sich um eine um 2 (nach rechts) verschobene Sinusfunktion, welche bei $t = 2$ eingeschaltet wird:



Wir haben

$$F(s) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1}$$

und somit folgt

$$\mathcal{L}(H(t-2)\sin(t-2)) = e^{-2s}F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+1}.$$

6.9. **Ableitungseigenschaften.**

Theorem 6.6 (Ableitung Zeitbereich)**.** *Sei $f(t)$ gegeben und sei $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Es gilt*

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = sF(s) - f(0).$$

Beweis:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = \int_0^\infty \frac{df}{dt}(t)e^{-st}dt$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}_{=F(s)}$$
$$= -f(0) + sF(s),$$

wobei wir für die zweite Zeile partiell integriert haben.

Bemerkung: Analoge Ausdrücke lassen sich für Ableitungen höherer Ordnung herleiten. Beispielsweise folgt der Ausdruck für die zweite Ableitung rekursiv aus dem Ausdruck für die erste Ableitung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}(t)\right) &= s\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) - f'(0)\\ &= s\left(sF(s) - f(0)\right) - f'(0)\\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Der Ausdruck für die Ableitung n-ter Ordnung ist

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Als Anwendungsbeispiel berechnen wir die Transformation der Funktion $\cos(t)$ aus der Transformation der Funktion $\sin(t)$. Sei also $f(t) = \sin(t)$. Wir haben $f(0) = 0$, $\frac{df}{dt}(t) = \cos(t)$ und $F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{1}{s^2+1}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\cos(t)\right) = \mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) &= sF(s) - f(0)\\ &= \frac{s}{s^2+1},\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der uns bekannten Transformation.

Theorem 6.7 (Ableitung Bildbereich)**.** *Sei $f(t)$ gegeben und sei $F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)$. Es gilt*

$$\frac{dF}{ds}(s) = \mathcal{L}\left(-tf(t)\right).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{ds}(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\\ &= \int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}\left(e^{-st}\right)dt\\ &= -\underbrace{\int_0^\infty f(t)te^{-st}dt}_{=\mathcal{L}(tf(t))}\\ &= \mathcal{L}\left(-tf(t)\right).\end{aligned}$$

Bemerkung: Analoge Ausdrücke lassen sich für Ableitungen höherer Ordnung herleiten. Es gilt

$$\frac{d^nF}{ds^n}(s) = \mathcal{L}\left((-t)^n f(t)\right).$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Transformation von $tf(t)$ mit $f(t) = \sin(t)$, i.e. wir betrachten die Transformation von $t\sin(t)$. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(t\sin(t)\right) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left(\sin(t)\right)\\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\\ &= \frac{2s}{(s^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Analog findet man

$$\mathcal{L}\left(t\cos(t)\right) = \frac{2s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

6.10. **Integral im Zeitbereich.**

Theorem 6.8 (Integral Zeitbereich)**.** *Sei $f(t)$ gegeben und sei $F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F(s)}{s}.$$

Beweis: Wir benutzten die Definition der Transformation und integrieren partiell[5]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)du\right) e^{-st}dt \\
&= \underbrace{\left(\int_0^t f(u)du\right)\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}_{=F(s)} \\
&= \frac{1}{s}F(s).
\end{aligned}$$

6.11. **Darstellung der Eigenschaften in Kommutativen Diagrammen.** Eine für die Anwendung zugängliche und übersichtliche Form der obigen Eigenschaften ist die Darstellung in *kommutativen Diagrammen*. Die Diagramme heissen kommutativ, weil es möglich ist auf beliebigem Wege (und in beliebiger Richtung) von einem Ort im Diagramm zu einem anderen Ort zu gelangen. Im folgenden ist jeweils $f(t)$ eine gegebene Funktion und $F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)$. Weiter ist $a > 0$ eine gegebene Konstante.

6.11.1. *Ähnlichkeit.* Die Eigenschaft

$$\mathcal{L}\left(f(at)\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

wird dargestellt als

$$\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto at"'] & F(s) \arrow[d] \\
f(at) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)
\end{tikzcd}$$

Die Anwendung dieses Diagramms auf die Transformation $\mathcal{L}\left(\cos(\omega t)\right)$ ist

$$\begin{tikzcd}
\cos(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto \omega t"'] & \frac{s}{s^2+1} \arrow[d] \\
\cos(\omega t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{\omega}\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}
\end{tikzcd}$$

Die Kommutationseigenschaft des Diagramms wird in diesem Fall ausgenutzt, indem man die Funktion $\cos(\omega t)$ zuerst im Zeitbereich auf die elementare Funktion $\cos(t)$ zrückführt, diese Funktion dann transformiert und die gefundene Funktion im Bildbereich entsprechend anpasst, anstelle von direkter Transformation der Funktion $\cos(\omega t)$ in den Bildbereich.

6.11.2. *Dämpfung.* Die Eigenschaft

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right) = F(s+a)$$

[5]Wir verwenden

$$\int_0^\infty F(t)G'(t)dt = F(t)G(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty F'(t)G(t)dt$$

mit $F(t) = \int_0^t f(u)du$ und $G(t) = e^{-st}$.

wird dargestellt als

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-at}"'] & F(s) \arrow[d, "s \mapsto s+a"] \\ e^{-at} f(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & F\left(s+a\right) \end{tikzcd}$$

6.11.3. *Zeitverschiebung.* Die Eigenschaft

$$\mathcal{L}\left(H(t-a)f(t-a)\right) = e^{-as}F(s)$$

wird dargestellt als

$$\begin{tikzcd} H(t)f(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t \mapsto t-a"'] & F(s) \arrow[d, "\cdot e^{-as}"] \\ H(t-a)f(t-a) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & e^{-as}F\left(s\right) \end{tikzcd}$$

6.11.4. *Ableitung Zeitbereich.* Die Eigenschaft

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = sF(s) - f(0)$$

wird dargestellt als

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\frac{d}{dt}"'] & F(s) \arrow[d] \\ f'(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & sF\left(s\right) - f(0) \end{tikzcd}$$

6.11.5. *Ableitung Bildbereich.* Die Eigenschaft

$$\frac{dF}{ds}(s) = \mathcal{L}\left(-tf(t)\right)$$

wird dargestellt als

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot(-t)"'] & F(s) \arrow[d, "\frac{d}{ds}"] \\ -tf(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & F'(s) \end{tikzcd}$$

6.11.6. *Integral Zeitbereich.* Die Eigenschaft

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F(s)}{s}$$

wird dargestellt als

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d] & F(s) \arrow[d, "\cdot \frac{1}{s}"] \\ \int_0^t f(u)du \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{s}F(s) \end{tikzcd}$$

6.11.7. *Kombination von Diagrammen.* Wir illustrieren an zwei Beispielen.

(i) Wir kombinieren die Diagramme der Eigenschaften Ähnlichkeit und Dämpfung um $\mathcal{L}\left(e^{-3t}\sin(\omega t)\right)$ zu bestimmen.

$$\begin{tikzcd}
\sin(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto\omega t"'] & \frac{1}{s^2+1} \arrow[d] \\
\sin(\omega t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-3t}"'] & \frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} \arrow[d] \\
e^{-3t}\sin(\omega t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(\frac{s+3}{\omega}\right)^2+1}
\end{tikzcd}$$

Aus diesem Diagramm folgt

$$\mathcal{L}\left(e^{-3t}\sin(\omega t)\right) = \frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(\frac{s+3}{\omega}\right)^2+1} = \frac{\omega}{(s+3)^2+\omega^2}.$$

(ii) Wir kombinieren das Diagramm der Eigenschaft Ableitung im Zeitbereich mit sich selbst um $\mathcal{L}\left(f'''(t)\right)$ zu bestimmen.

$$\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\frac{d}{dt}"'] & F(s) \arrow[d] \\
f'(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\frac{d}{dt}"'] & sF(s)-f(0) \arrow[d] \\
f''(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\frac{d}{dt}"'] & s\big(sF(s)-f(0)\big)-f'(0) \arrow[d] \\
f'''(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & s\Big(s\big(sF(s)-f(0)\big)-f'(0)\Big)-f''(0)
\end{tikzcd}$$

Aus diesem Diagramm folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(f'''(t)\right) &= s\Big(s\big(sF(s)-f(0)\big)-f'(0)\Big)-f''(0) \\
&= s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0).
\end{aligned}$$

6.12. **Stückweise definierte Funtionen.** Wie bereits gesehen lassen sich stückweise definierte Funktionen mittels der Heavisidefunktion auf eine Zeile umschreiben. Wir illustrieren die Transformation einer stückweise definierten Funktion und die darin enthaltene Anwendung des Diagrammes der Zeitverschiebung am Beispiel:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0, \\ t^2 & 0\le t<1, \\ 0 & 1\le t. \end{cases}$$

Umgeschrieben mittels Fensterfunktionen:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left(H(t)-H(t-1)\right)t^2 \\
&= H(t)t^2 - H(t-1)t^2.
\end{aligned}$$

Der erste Term kann direkt transformiert werden:

$$\mathcal{L}\left(H(t)t^2\right) = \mathcal{L}\left(t^2\right) = \frac{2}{s^3}.$$

Für den zweiten Term verwenden wir das Diagramm der Zeitverschiebung:

$$\begin{tikzcd}
H(t)(t+1)^2 = H(t)(t^2+2t+1) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto t-1"'] & \frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s} \arrow[d, "\cdot e^{-s}"] \\
H(t-1)t^2 \arrow[r, "\mathcal{L}"] & e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)
\end{tikzcd}$$

Somit haben wir

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

6.13. **Periodische Funktionen.**

Theorem 6.9 (Periodische Funktionen)**.** *Sei*

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

gegeben, so dass

$$f(t+T) = f(t)$$

für eine Konstante $T > 0$. *Dann gilt*

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt.$$

Beweis: Wir teilen den Integrationsbereich wie folgt auf

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Mit der Substitution $u = t - T$ schreiben wir das zweite Integral als

$$\begin{aligned} \int_T^\infty f(t)e^{-st}dt &= \int_0^\infty f(u+T)e^{-s(u+T)}du \\ &= e^{-sT}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du \\ &= e^{-sT}\mathcal{L}\left(f(t)\right), \end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile die Periodizität von $f(t)$, i.e. $f(u+T) = f(u)$ verwendet haben. Dies in der obigen Gleichung verwendet ergibt:

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + e^{-sT}\mathcal{L}\left(f(t)\right).$$

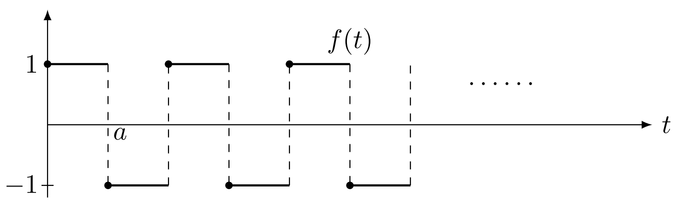
Diese Gleichung nach $\mathcal{L}\left(f(t)\right)$ aufgelöst ergibt die Aussage des Theorems.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < a, \\ -1 & a \le t < 2a, \end{cases}$$

periodisch fortgesetzt durch

$$f(t+2a) = f(t).$$



Die Laplacetransformation ist gegeben durch

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left(\int_0^a 1 \cdot e^{-st} dt + \int_a^{2a} (-1) \cdot e^{-st} dt \right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^a - \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) \Big|_a^{2a} \right) \\
&= \frac{1}{s(1-e^{-2as})} \left(1 - 2e^{-as} + e^{-2as} \right) \\
&= \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})}.
\end{aligned}
$$

6.14. **Partialbruchzerlegung.** Als Vorbereitung auf die Rücktransformation von gebrochenrationalen Funktionen rekapitulieren wir die Partialbruchzerlegung.

Sei eine gebrochen rationale Funktion gegeben. Das Vorgehen der Partialbruchzerlegung ist wie folgt:

(i) Ist die gegebene gebrochenrationale Funktion nicht echt gebrochen rational, wird sie in eine solche durch Polynomdivision überführt.
(ii) Die Nullstellen des Nenners werden bestimmt.
(iii) Nach folgender Vorschrift wird ein Ansatz gemacht:

Nullstelle(n)	Term(e) in Ansatz
x_1, einfach	$\frac{A}{x-x_1}$
x_1, n-fach	$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n}$
x_1 und $\overline{x_1}$ (komplex) einfach	$\frac{A+Bx}{x^2+px+q}$, wobei $x^2+px+q = (x-x_1)(x-\overline{x_1})$
x_1 und $\overline{x_1}$ (komplex) n-fach	$\frac{A_1+B_1x}{x^2+px+q} + \frac{A_1+B_1x}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{A_1+B_1x}{(x^2+px+q)^n}$, wobei $x^2+px+q = (x-x_1)(x-\overline{x_1})$

(iv) Die auftretenden Konstanten werden durch Koeffizientenvergleich bestimmt.
(v) Einsetzen der Konstanten in den Ansatz ergibt die Partialbruchzerlegung.

Wir illustrieren an Beispielen:

(i) Sei

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Die Funktion ist echt gebrochen rational. Die Nullstellen des Nenners sind $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Der Ansatz lautet

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Multiplikation mit x^2-1 ergibt

$$x = A(x+1) + B(x-1).$$

Koeffizientenvergleich führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = A - B \end{cases}$$

Die Lösung davon ist

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{1}{2}.$$

Somit ist die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}.$$

(ii) Sei

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1}.$$

Polynomdivision ergibt

$$f(x) = 1 + \frac{2x-1}{x^2-2x+1}.$$

Der Nenner des echt gebrochen rationalen Rests besitzt die doppelte Nullstelle $x_1 = 1$. Somit ist der Ansatz

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Multiplikation mit $x^2 - 2x + 1$ ergibt

$$2x - 1 = A(x-1) + B.$$

Koeffizientenvergleich führt auf

$$\begin{cases} 2 = A \\ -1 = -A + B \end{cases}$$

Die Lösung davon ist

$$A = 2, \qquad B = 1.$$

Somit ist die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

(iii) Sei

$$f(x) = \frac{5x^2+2x+1}{x^3+x}.$$

Die Funktion ist echt gebrochen rational, die Nullstellen des Nenners sind $x_1 = 0$, $x_2 = j$, $x_3 = -j$. Somit lautet der Ansatz

$$\frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{(x^2+1)}.$$

Multiplikation mit $x^3 + x$ ergibt

$$\begin{cases} 5 = A + C \\ 2 = B \\ 1 = A \end{cases}$$

Die Lösung davon ist

$$A = 1, \qquad B = 2, \qquad C = 4.$$

Somit ist die Partialbruchzerlegung

$$\frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{2+4x}{x^2+1}.$$

6.15. **Inverse Laplacetransformation.** Die inverse Laplacetransformation beschreibt die Transformation einer gegebenen Funktion $F(s)$ im Bildbereich zurück auf die Funktion $f(t)$ im Originalbereich, so dass $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$. In Anlehnung an die Notation für inverse Funktionen verwendet man dazu die Notation

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

oder

$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)\ .$$

Prinzipiell ist die inverse Transformation direkt möglich. In der Praxis wird die inverse Transformation aber durch Tabellen bestimmt.

Beispielsweise folgt aus

$$t^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \tfrac{2}{s^3}$$

dass

$$\tfrac{2}{s^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t^2 \ ,$$

I.e.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = t^2.$$

Ein weiteres Beispiel ist

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin(t).$$

6.16. **Rücktransformation von gebrochen rationalen Funktionen.** Wie wir später sehen werden liefern Beschreibungen von dynamischen Systemen oft eine gebrochen rationale Funktion im Bildbereich. Die Rücktransformation dieser Funktionen in den Originalbereich erfolgt durch Partialbruchzerlegung der gebrochen rationalen Funktion und Rücktransformation der erhaltenen Partialbrüche. Letzteres geschieht an Hand von gegebenen Transformationen von elementaren Funktionen und Eigenschaften der Laplacetransformation.

Beispiel: Sei

$$F(s) = \frac{s^3+2s^2-4s+4}{s^2(s-2)^2}.$$

Die Nullstellen des Nenners sind somit $s_{1,2} = 0$ und $s_{3,4} = 2$ (jeweils doppelt). Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{s^3+2s^2-4s+4}{s^2(s-2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2}.$$

Multiplikation mit $s^2(s-2)^2$ führt auf

$$s^3+2s^2-4s+4 = As(s-2)^2 + B(s-2)^2 + Cs^2(s-2) + Ds^2$$

und Koeffizientenvergleich führt auf

$$\begin{cases} \ \ 1 = A + C \\ \ \ 2 = -4A + B - 2C + D \\ -4 = 4A - 4B \\ \ \ 4 = 4B \end{cases}$$

Die Lösung davon ist

$$A = 0, \qquad B = 1, \qquad C = 1, \qquad D = 3$$

und die Partialbruchzerlegung ist

$$F(s) = \frac{s^3+2s^2-4s+4}{s^2(s-2)^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2}.$$

Nun führen wir die Rücktransformation gliedweise durch:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = e^{2t}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-2)^2}\right) = 3te^{2t},$$

wobei wir für den dritten Term die Eigenschaft der Dämpfung verwendet haben:

$$\begin{tikzcd} te^{2t} \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-2t}"'] & \frac{1}{(s-2)^2} \arrow[d, "s\mapsto s+2"] \\ t \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{s^2} \end{tikzcd}$$

Somit finden wir

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) = t + e^{2t} + 3te^{2t}.$$

Wir illustrieren das Vorgehen an weiteren Beispielen (die Bildfunktionen der ersten drei Beispiele entsprechen den besprochenen Beispielen im Teilabschnitt Partialbruchzerlegung):

(i) Sei

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 1}.$$

Die Partialbruchzerlegung ist

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}.$$

Die inverse Laplacetransformation ist

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}. \end{aligned}$$

(ii) Sei

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2 - 2s + 1}.$$

Die Partialbruchzerlegung ist

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2 - 2s + 1} = 1 + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Die inverse Laplacetransformation ist

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(1\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) \\ &= \delta(t) + 2e^{t} + te^{t}. \end{aligned}$$

Für die Rücktransformation des ersten Termes verweisen wir auf den später folgenden Teilabschnitt zur Deltafunktion. Für den dritten Term verwenden wir die Eigenschaft der Dämpfung

$$\begin{tikzcd} te^{t} \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-t}"'] & \frac{1}{(s-1)^2} \arrow[d, "s \mapsto s+1"] \\ t \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{s^2} \end{tikzcd}$$

(iii) Sei

$$F(s) = \frac{5s^3 + 2s + 1}{s^3 + s}.$$

Die Partialbruchzerlegung ist

$$F(s) = \frac{5s^3 + 2s + 1}{s^3 + s} = \frac{1}{s} + \frac{2 + 4s}{s^2 + 1}.$$

Die inverse Laplacetransformation ist

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2 + 4s}{s^2 + 1}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right) \\ &= 1 + 2\sin(t) + 4\cos(t). \end{aligned}$$

(iv) Sei

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 6s + 13}.$$

Der Nenner besitzt nur komplexe Nullstellen, somit ist dieser Ausdruck bereits ein Partialbruch. Quadratisches Ergänzen liefert

$$s^2 + 6s + 13 = (s+3)^2 + 4$$

und wir schreiben

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)^2 + 4}.$$

Die Kombination der Diagramme der Ähnlichkeit und Dämpfung liefert

$$\begin{array}{ccc}
\sin(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \frac{1}{s^2+1} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle t\mapsto 2t} & & \Big\downarrow \\
\sin(2t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1} = \frac{2}{s^2+4} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \cdot e^{-3t}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle s\mapsto s+3} \\
e^{-3t}\sin(2t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \frac{1}{(s+3)^2+4}
\end{array}$$

Somit ist die inverse Laplacetransformation

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) = e^{-3t}\sin(2t).$$

(v) Sei

$$F(s) = e^{-2s}\frac{2}{s^2+9}.$$

Die Kombination der Diagramme der Ähnlichkeit und Verschiebung liefert

$$\begin{array}{ccc}
H(t)\frac{2}{3}\sin(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \frac{2}{3}\frac{1}{s^2+1} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle t\mapsto 3t} & & \Big\downarrow \\
H(t)\frac{2}{3}\sin(3t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \frac{2}{s^2+9} = \frac{2}{9}\frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle t\mapsto t-2} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \cdot e^{-2s}} \\
H(t-2)\frac{2}{3}\sin(3t-6) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & e^{-2s}\frac{2}{s^2+9}
\end{array}$$

Bemerkung: Im Diagramm der Ähnlichkeit haben wir verwendet dass $H(t) = H(3t)$ Somit ist die inverse Laplacetransformation

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) = H(t-2)\frac{2}{3}\sin(3t-6).$$

6.17. **Differentialgleichungen.** Das Vorgehen beim Lösen von Differentialgleichungen mittels Laplacetransformation ist das folgende:

(i) Transformation der Differentialgleichung in den Bildbereich. Bereits hier werden die Anfangsbedingungen des Problems berücksichtigt (siehe die Eigenschaft Ableitung Zeitbereich).

(ii) Lösen des Problems im Bildbereich. Hierbei handelt es sich um die Lösung einer algebraischen Gleichung (oder eines Gleichungssystems).

(iii) Rücktransformation in den Originalbereich. Meist ist dieser Schritt der aufwendigste. Jedoch können wichtige Informationen über die Lösung (zum Beispiel asymptotisches Verhalten,...) bereits aus der Lösung im Bildbereich gewonnen werden und die Rücktransformation ist in vielen Fällen nicht nötig.

Wir illustrieren an Beispielen:

(i) Sei das folgende Anfangswertproblem gegeben:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

In einem ersten Schritt transformieren wir die Differentialgleichung. Dazu werden alle Terme einzeln transformiert. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(y(t)\right) &= Y(s), \\ \mathcal{L}\left(y'(t)\right) &= sY(s) - y(0) \\ &= sY(s) - 1, \\ \mathcal{L}\left(y''(t)\right) &= s(sY(s) - 1) - y'(0) \\ &= s^2Y(s) - s \end{aligned}$$

und die Differentialgleichung wird zu

$$s^2Y(s) - s + Y(s) = 0.$$

Wie oben erwähnt stecken in dieser Gleichung bereits die Anfangsbedingungen (dies im Gegensatz zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung wo meistens zuerst eine allgemeine Lösung gesucht wird und danach eine partikuläre Lösung mittels der Anfangsbedingungen bestimmt wird). Die Lösung dieser algebraischen Gleichung ist

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Die Rücktransformation ist elementar durchführbar und liefert

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = \cos(t).$$

(ii) Sei das folgende Anfangswertproblem gegeben:

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = t^2e^{3t} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(y(t)\right) &= Y(s), \\ \mathcal{L}\left(y'(t)\right) &= sY(s) - y(0) \\ &= sY(s) - 2, \\ \mathcal{L}\left(y''(t)\right) &= s(sY(s) - 2) - y'(0) \\ &= s^2Y(s) - 2s - 6, \\ \mathcal{L}\left(t^2e^{3t}\right) &= \frac{2}{(s-3)^3}, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Zeile das Diagramm der Dämpfungseigenschaft verwendet haben:

$$\begin{tikzcd} t^2e^{3t} \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-3t}"'] & \frac{2}{(s-3)^3} \arrow[d, "s\mapsto s+3"] \\ t^2 \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{2}{s^3} \end{tikzcd}$$

Die Differentialgleichung wird somit zu

$$s^2Y(s) - 2s - 6 - 6sY(s) + 12 + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}.$$

Daraus folgt

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}.$$

(der Ausdruck auf der rechten Seite wird nicht auf einen Bruch gebracht, da dieser Schritt durch eine Partialbruchzerlegung rückgängig gemacht werden müsste). Wir haben

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) = e^{3t}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^5}\right) = \frac{t^4 e^{3t}}{4!},$$

wobei wir für den zweiten Term das Diagramm der Eigenschaft der Dämpfungseigenschaft verwendet haben:

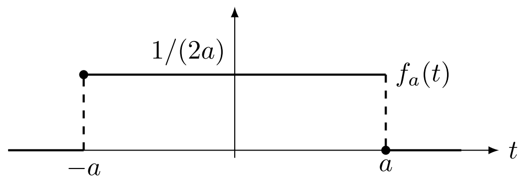
$$\begin{tikzcd}
\frac{t^4 e^{3t}}{4!} \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-3t}"'] & \frac{1}{(s-3)^5} \arrow[d, "s \mapsto s+3"] \\
\frac{t^4}{4!} \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{s^5}
\end{tikzcd}$$

Somit folgt

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = \left(2 + \frac{2t^4}{4!}\right) e^{3t}.$$

6.18. **Deltafunktion.** Wir betrachten die Funktion

$$f_a(t) = \frac{1}{2a}\Big(H(t+a) - H(t-a)\Big), \qquad a > 0.$$



Unabhängig von a gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)dt = 1.$$

Formal ist die *Deltafunktion* definiert durch

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} f_a(t).$$

Es gilt $\delta(t) = 0$ für $t \neq 0$, jedoch kann dem Argument $t = 0$ kein Funktionswert zugeordnet werden. Es handelt sich also bei der Deltafunktion nicht um eine Funktion im üblichen Sinn. Die obige Integraleigenschaft von $f_a(t)$ überträgt sich auf den Grenzwert, i.e. auf die Deltafunktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Für die verschobene Deltafunktion $\delta(t-b)$ gilt $\delta(t-b) = 0$ für $t \neq b$. Weiter gilt die wichtige Eigenschaft:

Theorem 6.10 (Fundamentale Eigenschaft Deltafunktion)**.** *Sei $f(t)$ eine gegebene Funktion und sei $\delta(t)$ die Deltafunktion. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-b)dt = f(b).$$

Heuristische Herleitung: Wir haben $f(t)\delta(t-b) = 0$ für $t \neq b$. Somit verschwindet der Integrand für $t \neq b$ und wir können den Integrationsbereich auf ein Intervall $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ einschränken, wobei wir $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen können:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-b)dt = \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(t)\delta(t-b)dt$$

Somit ist für die Berechnung des Integrals die Funktion $f(t)$ nur im Intervall $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ massgebend. Dieses Intervall können wir aber beliebig klein wählen (indem wir ε beliebig klein wählen) und somit ist $f(t)$ nur an der Stelle $t=b$ relevant, i.e. man kann $f(t)=f(b)$ setzen, i.e. $f(t)$ als konstant betrachten und vor das Integral schreiben:

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(t)\delta(t-b)dt = f(b)\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \delta(t-b)dt.$$

Das verbleibende Integral ist gleich Eins und somit folgt das Resultat. Für eine rigorose Herleitung kann für $f(t)$ eine Taylorentwicklung an der Stelle $t=t_0$ gemacht werden.

Theorem 6.11 (Laplacetransformation Deltafunktion)**.**

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = 1.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) &= \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty H(t)\delta(t)e^{-st}dt \\ &= H(0) = 1,\end{aligned}$$

wobei wir für die dritte Zeile die fundamentale Eigenschaft der Deltafunktion verwendet haben.

Aus der Eigenschaft Zeitverschiebung folgt

$$\mathcal{L}\left(\delta(t-b)\right) = e^{-sb}.$$

Beispiel: Wir suchen die Rücktransformation von

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2+4}.$$

Polynomdivision liefert

$$F(s) = 1 - \frac{4}{s^2+4}$$

und die Rücktransformation ist

$$\begin{aligned}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(1\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2+4}\right) \\ &= \delta(t) - 2\sin(2t).\end{aligned}$$

Bemerkungen:

(i) Wir wissen

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

$$H(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \tfrac{1}{s}$$

Zwischen den Funktionen im Bildbereich gibt es einen Faktor $\frac{1}{s}$. Laut dem Diagramm für die Integration Zeitbereich entspricht dieser Faktor $\frac{1}{s}$ im Originalbereich einer Integration:

$$\begin{tikzcd} \delta(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\cdot\frac{1}{s}"] \\ \int_0^t \delta(u)du \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{s} \end{tikzcd}$$

In diesem Sinn entspricht die Deltafunktion der Ableitung der Heavisidefunktion.

(ii) Wir betrachten die zwei Anfangswertprobleme:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y = v_0\delta(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Physikalisch entsprechen die Differentialgleichungen beispielsweise einem ungedämpften Oszillator, einmal mit Anfangsgeschwindigkeit v_0, einmal ohne Anfangsgeschwindigkeit aber mit einwirkender externer Kraft der Form $v_0\delta(t)$. Die Laplacetransformation liefert für beide Anfangswertprobleme die folgende Gleichung im Bildbereich für $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{v_0}{s^2+1},$$

i.e. die Laplacetransformationen stimmen überein. Somit verhalten sich die Systeme physikalisch gleich. Das heisst dass der Ausdruck $v_0\delta(t)$ einer infinitesimal kurzen, jedoch unendlich grossen Krafteinwirkung entspricht, welche auf den Oszillator einen Impuls von v_0 überträgt.

6.19. **Faltung.** Oft stellt sich bei der Rücktransformation vom Bild- in den Orignalbereich die Aufgabe der Rücktransformation einer Funktion $F(s) = F_1(s)F_2(s)$, i.e. eines Produkts, wobei die Rücktransformation der einzelnen Faktoren bekannt ist, i.e. man kennt $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(F_1(s))$ und $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(F_2(s))$. Nun ist die Rücktransformation des Produktes $F_1(s)F_2(s)$ nicht gegeben als Produkt der Rücktransformationen. Jedoch gilt

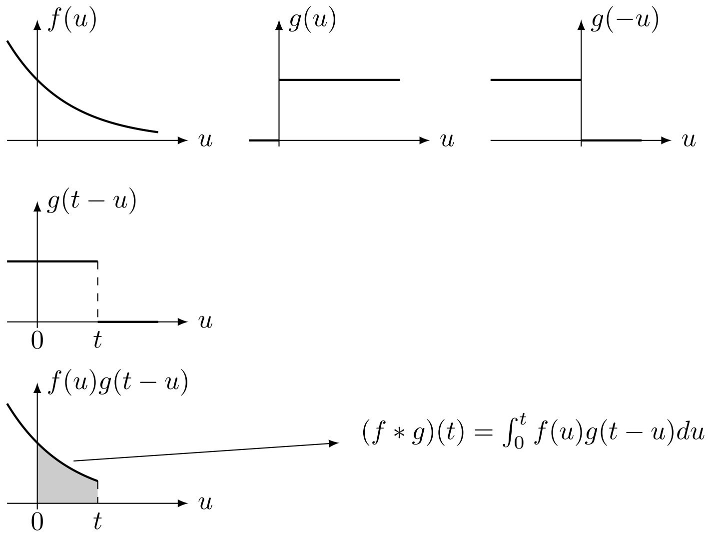
$$\mathcal{L}^{-1}(F_1(s)F_2(s)) = (f_1 * f_2)(t).$$

In dieser Gleichung ist $(f_1 * f_2)(t)$ das *Faltungsprodukt* der beiden Funktionen $f_1(t)$, $f_2(t)$. Dieses ist definiert als

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du, \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

Wir interpretieren das Faltungsprodukt grafisch an Hand der Funktionen

$$f(t) = e^{-t}, \qquad g(t) = H(t).$$



Das Faltungsprodukt ist

(i) kommutativ:

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1,$$

(ii) assoziativ:

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3),$$

(iii) distributiv:

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3.$$

Als Beispiel bestimmen wir die Faltung von e^{at} und e^{bt}:

$$\begin{aligned}
e^{at} * e^{bt} &= \int_0^t e^{au} e^{b(t-u)} du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)u} du \\
&= e^{bt} \frac{e^{(a-b)u}}{a-b} \Big|_0^t \\
&= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.
\end{aligned}$$

Die obige Eigenschaft der Rücktransformation eines Produktes formulieren wir in der Form:

Theorem 6.12 (Faltungssatz). *Seien $f_1(t)$, $f_2(t)$ gegebene Funktionen. Es gilt*

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}(f_1)\,\mathcal{L}(f_2).$$

Als Diagramm

$$\begin{tikzcd}
f_1(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d] & F_1(s) \arrow[d] \\
(f_1 * f_2)(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & F_1(s)F_2(s) \\
f_2(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[u] & F_2(s) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Als Anwendungsbeispiel bestimmen wir die Rücktransformation der Funktion

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)s} = \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{=F_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{=F_2(s)}$$

mit dem Faltungssatz. Wir haben

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F_1(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin(t), \\
f_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F_2(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Somit ist die Rücktransformation des Produkts

$$\begin{aligned}
f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}(F_1(s)F_2(s)) &= (f_1 * f_2)(t) \\
&= \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du \\
&= \int_0^t \sin(u) du \\
&= -\cos(t) + 1,
\end{aligned}$$

Die Faltung mit der Deltafunktion ist

$$\begin{aligned}
(\delta * f)(t) &= \int_0^t \delta(u) f(t-u) du \\
&= \int_{-\infty}^t H(u)\delta(u) f(t-u) du \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\delta * f = f * \delta = f$$

i.e. die Deltafunktion ist die Identität des Faltungsprodukts.

Aufgabe 62. Basierend auf der Definition der Laplacetransformation bestimme man die Laplacetransformation von $f(t) = \sin(t)$ und $g(t) = \cos(t)$. Man verwende zweifache partielle Integration.

Aufgabe 63. Unter Verwendung der Definition der Laplacetransformation bestimme man

(i) $\mathcal{L}\left(e^{kt}\right)$
(ii) $\mathcal{L}\left(\cosh(2t)\right)$
(iii) $\mathcal{L}\left(3+t\right)$
(iv) $\mathcal{L}\left(t^2\right)$
(v) $\mathcal{L}\left(te^{-t}\right)$

Hinweis zu (ii): $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$

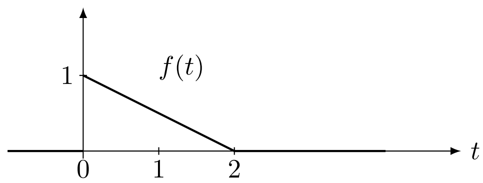
Aufgabe 64. Unter Benutzung der Definition der Laplacetransformation bestimme man die Transformation des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1 & a < t \leq b \\ 0 & t > b \end{cases}$$

Aufgabe 65.

(i) Man benutze die Identität $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$ um die Bildfunktion von $\sin^2(t)$ zu bestimmen.
(ii) Man bestimme $\mathcal{L}\left(\cos^2(t)\right)$ mit Hilfe der Pythagorasidentiät der Trigonometrie.

Aufgabe 66. Wir betrachten die Funktion $f(t)$, gegeben durch ihren Graphen:



Man bestimme die Laplacetransformation der Funktion $f(t)$ anhand der Definition.

Aufgabe 67. Man bestimme die folgenden Laplacetransformationen: (Hinweis: Man verwende die Eigenschaften Ähnlichkeit und Dämpfung und verwende bekannte Laplacetransformationen von Elementarfunktionen)

(i) $\mathcal{L}\left((1+t)^2\right)$
(ii) $\mathcal{L}\left(\cos(4t)\right)$
(iii) $\mathcal{L}\left(3e^{-t} + \sin(6t)\right)$
(iv) $\mathcal{L}\left(e^{-t}(t^2+1)\right)$
(v) $\mathcal{L}\left((3t)^5\right)$
(vi) $\mathcal{L}\left(e^{\lambda t}\right)$
(vii) $\mathcal{L}\left(e^{at}\cos(\omega t)\right)$
(viii) $\mathcal{L}\left(\cos(t) - \sin(3t)\right)$
(ix) $\mathcal{L}\left(e^{at}\sin(\omega t)\right)$
(x) $\mathcal{L}\left(Ae^{-\delta t}\sin(\omega t)\right)$

Aufgabe 68. Man finde einen expliziten Ausdruck für die folgenden Integrale, ohne zu integrieren, indem man die Laplacetransformation benutzt:

(i) $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(s+7)t}dt$
(ii) $G(s) = \displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-(s-3)t}dt$

(iii) $H(s) = \int_0^\infty 4e^{-st}\sin(6t)dt$

Aufgabe 69. Man schreibe die Funktion

$$f(t) = (H(t) - H(t-5))4t + H(t-2)t^2 + H(t-4)\frac{3t^3}{4}$$

als stückweise definierte Funktion.

Aufgabe 70. Man schreibe die folgenden Funktionen mit Hilfe der Heavisidefunktion und verwende die Verschiebungseigenschaft zur Berechnung der Laplacetransformationen:

(i)

$$f(t) = \begin{cases} t - t_0 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

wobei $t_0 > 0$.

(ii)

$$g(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

(iii)

$$k(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t \end{cases}$$

Aufgabe 71. Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f(t) = H(t)H(3-t), \qquad g(t) = H(t) - H(t-3).$$

(i) Man schreibe die beiden Funktionen jeweils als stückweise definierte Funktion für $t \geq 0$.
(ii) Stimmen die Funktionen überein?
(iii) Man zeige dass $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(g(t))$.

Aufgabe 72. Man verwende die Verschiebungseigenschaft und berechne die Laplacetransformationen von

(i) $f(t) = H(t-4)(t-4)^2$
(ii) $f(t) = H(t-T)e^{t-T}$
(iii) $f(t) = H(t-3)e^{-t}$
(iv) $f(t) = t^3 H(t-1)$

Aufgabe 73. Von den Funktionen $f(t) = t^2$, $f'(t) = 2t$ sind die Anfangswerte $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ bekannt. Sei $F(s)$ die Bildfunktion von $f(t)$. Man berechne unter der Verwendung der Eigenschaft Ableitung im Zeitbereich die Laplacetransformation der Funktionen $f'(t)$ und $f''(t)$.

Aufgabe 74. Man finde die Laplacetransformation der untenstehenden Funktionen. Die verwendeten Eigenschaften sind in Diagrammen darzustellen.

(i) $f(t) = t^2 + 2t + 1$
(ii) $g(t) = te^{-3t}\sin(2t)$

Aufgabe 75. Ausgehend von $\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}$ soll durch Anwendung der Eigenschaft Ableitung im Bildbereich (zwei mal angewendet) die Bildunktion für $f(t) = t^2 e^{at}$ bestimmt werden.

Aufgabe 76. Man bestimme die Laplacetransformation der folgenden Funktionen

(i) $f(t) = e^{-2t}\cos(5t - 10)H(t-2)$

(ii) $g(t) = e^{-2t+4}\cos(5t-10)H(t-2)$

Aufgabe 77. Sei

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1, \\ 0 & t \ge 1. \end{cases}$$

(i) Man schreibe $f(t)$ mit Hilfe der Heavisidefunktion und zeige dass

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}) - \frac{1}{s}e^{-s}.$$

(ii) Unter der Voraussetzung $x(0) = 0$ bestimme man die Lösung der Differentialgleichung

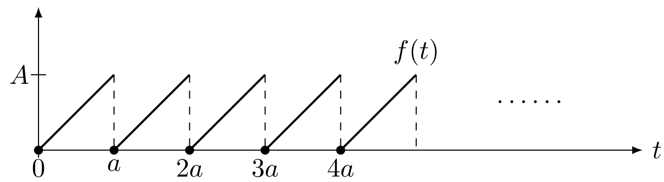
$$x'(t) + x(t) = f(t)$$

für $t \ge 0$.

Aufgabe 78. Man stelle die folgenden Funktionen grafisch dar, drücke sie durch Heavisidefunktionen aus und bestimme ihre Laplacetransformationen:

$$f(t) = \begin{cases} 3t^2 & 0 \le t < 4, \\ 2t-3 & 4 \le t < 6, \\ 5 & t \ge 6. \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1, \\ 2-t & 1 \le t < 2, \\ 0 & t \ge 2. \end{cases}$$

Aufgabe 79. Man zeige dass die Laplacetransformation der (periodischen) Sägezahnfunktion $f(t)$:



gegeben ist durch

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{A(1+as-e^{as})}{as^2(1-e^{as})}.$$

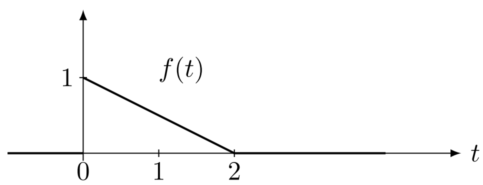
Aufgabe 80. Sei $g(t)$ die folgende periodische Funktion:

$$g(t) = 1 - e^{-t} \quad \text{für} \quad 0 \le t < 2, \qquad g(t+2) = g(t).$$

Man zeige dass

$$\mathcal{L}\left(g(t)\right) = \frac{1}{s} - \frac{1-e^{-2(s+1)}}{(s+1)(1-e^{-2s})},$$

Aufgabe 81. Wir betrachten die Funktion $f(t)$, gegeben durch ihren Graphen:



(i) Man schreibe die Funktion $f(t)$ mit Hilfe der Heavisidefunktion $H(t)$ und bestimme die Laplacetransformation mit Hilfe der Eigenschaften der Transformation.

(ii) Sei $g(t)$ die folgende periodische Fortsetzung von $f(t)$:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t < 3 \\ g(t-3) = g(t) & 3 \leq t. \end{cases}$$

Man skizziere die Funktion $g(t)$ (für $t \geq 0$) und bestimme die Laplacetransformation von $g(t)$.

Aufgabe 82. Sei $f(t)$ gegeben, sei $a > 0$ eine Konstante und sei $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Man beweise die Eigenschaft der Zeitverschiebung der Laplacetransformation, i.e. man zeige dass

$$\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s).$$

Aufgabe 83. Ausgehend von $\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1}$ soll durch Anwendung der Eigenschaft Integration im Zeitbereich (zweimal angewendet) die Rücktransformation von $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)s^2}$ bestimmt werden.

Aufgabe 84. Man finde die inverse Laplacetransformation der untenstehenden Funktionen. Die verwendeten Eigenschaften sind in Diagrammen darzustellen.

(i) $F(s) = \dfrac{6}{s} - \dfrac{3}{s-8}$

(ii) $G(s) = \dfrac{1}{4s^2 + 2s + 1}$

Aufgabe 85. Man bestimme die Rücktransformationen der Funktionen

(i) $\frac{1}{(s+3)(s+7)}$

(ii) $\frac{s+5}{(s+1)(s-3)}$

(iii) $\frac{s-1}{s^2(s+3)}$

(iv) $\frac{2s+6}{s^2+4}$

(v) $\frac{1}{s^2(s^2+16)}$

(vi) $\frac{s+8}{s^2+4s+5}$

(vii) $\frac{s+1}{s^2(s^2+4s+8)}$

(viii) $\frac{4s}{(s-1)(s+1)^2}$

(ix) $\frac{s+7}{s^2+2s+5}$

(x) $\frac{3s^2-7s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)}$

(xi) $\frac{1}{4s^2+1}$

(xii) $e^{-s}\frac{s}{s^2+1}$

Aufgabe 86.

(i) Man finde die inverse Laplacetransformation der untenstehenden Funktion. Die verwendeten Eigenschaften sind in Diagrammen darzustellen.

$$F(s) = \frac{17}{2s^2 + 4s + 10}$$

(ii) Man finde die inverse Laplacetransformation der Funktion

$$G(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$$

und skizziere den Graphen $y = g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$ für $t \in [0, 4]$. Hinweis:

$$\frac{1}{1-e^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s})^k.$$

Aufgabe 87. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 9e^{2t}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Hinweis zur Kontrolle: Die Bildfunktion kann geschrieben werden als

$$Y(s) = -\frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-2}.$$

Aufgabe 88. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) - 3y(t) = te^t, \\ \hfill y(0) = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 89. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4x(t) = H(t-2), \\ \hfill x(0) = 0, \\ \hfill x'(0) = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 90. Man skizziere den Graphen der Funktion

$$f(t) = |2-t|\,(H(t-1) - H(t-3))$$

und bestimme die Laplacetransformation $\mathcal{L}(f(t))$.

Aufgabe 91. Man skizziere den Graphen der Funktion

$$f(t) = H(2-t)$$

für $t \geq 0$ und bestimme die Laplacetransformation $\mathcal{L}(f(t))$.

Aufgabe 92. Im folgenden sind A, k und r positive Konstanten. Man Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) + kx(t) = g(t) \\ \hfill x(0) = A \end{cases}$$

wobei

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ r & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq t \end{cases}$$

Aufgabe 93. Man bestimme

(i) $\displaystyle\int_0^3 (1+e^{-t})\delta(t-2)dt$,

(ii) $\displaystyle\int_{-2}^1 (1+e^{-t})\delta(t-2)dt$.

Aufgabe 94. Man finde einen Wert für die Konstante t_0, so dass

$$\int_0^1 \sin^2(\pi(t-t_0))\delta(t-1/2)dt = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 95.

(i) Man löse die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe der Laplacetransformation.

(a)

$$\begin{cases} 2\dot{x}(t) + x(t) = 0, \\ \qquad x(0) = \beta, \end{cases}$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y''(0) = -1, \\ y'(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = 0. \end{cases}$$

(ii) Man finde die inverse Laplacetransformation der untenstehenden Funktion. Die verwendeten Eigenschaften sind in Diagrammen darzustellen.

$$G(s) = \frac{1}{4s^2 + 2s + 1}$$

(iii) Sei $f(t)$ gegeben und sei $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Man beweise die Eigenschaft der Ableitung im Zeitbereich der Laplacetransformation, i.e. man zeige dass

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = sF(s) - f(0).$$

Aufgabe 96. Seien a, b, und c positive Konstanten und sei

$$F(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

Man finde die inverse Laplacetransformation von $F(s)$ in den folgenden beiden Fällen:

(i) Sei $b^2 - 4ac < 0$.

(ii) Sei $b^2 - 4ac > 0$.

Aufgabe 97. Man bestimme die Konstanten α, β, y_0 und y_0' so, dass

$$Y(s) = \frac{2s - 1}{s^2 + s + 2}$$

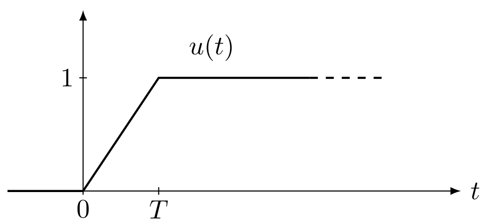
die Laplacetransformierte der Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$\begin{cases} y'' + \alpha y' + \beta y = 0, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_0'. \end{cases}$$

Aufgabe 98. Für die Spannung $y(t)$ über einem RC-Glied gilt die Differentialgleichung

$$RCy'(t) + y(t) = u(t).$$

Hierbei ist $u(t)$ die Eingangsspannung:



Zur Zeit $t = 0$ sei $y(0) = 0$.

(i) Man schreibe die Funktion $u(t)$ mit Hilfe von Heavisidefunktionen.

(ii) Man bestimme $Y(s)$.

(iii) Man bestimme $y(t)$ mit Hilfe der Laplacetransformation.

(iv) Man bestimme $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Aufgabe 99. Man löse das Anfangswertproblem

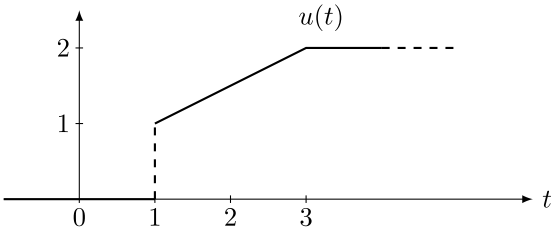
$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0, \\ \dot{y}(0) = 2, \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

mit Hilfe von Laplacetransformation. Hinweis: Es handelt sich nicht um ein Anfangswertproblem. Für die Lösung führe man $y_0 = y(0)$ als zu bestimmende Unbekannte ein.

Aufgabe 100. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

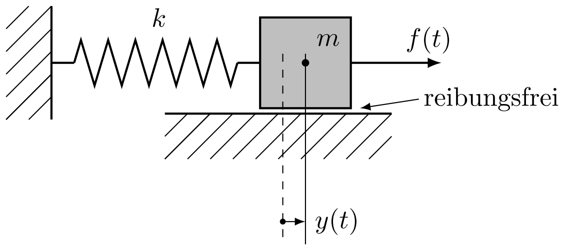
$$\begin{cases} y' + y = u, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Hierbei ist $u(t)$ gegeben durch:



(i) Man schreibe die Funktion $u(t)$ mit Hilfe von Heavisidefunktionen.
(ii) Man bestimme $U(s) = \mathcal{L}(u(t))$.
(iii) Man bestimme $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$.
(iv) Man bestimme $y(t)$.
(v) Man bestimme $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Aufgabe 101. Wir betrachten das mechanische System:



Wir bezeichnen mit m die Masse, mit k die Federkonstante und mit $y(t)$ die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage. Es gilt $m = k = 1$ und $f(t)$ ist eine auf den Körper wirkende Kraft, gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 1 \le t \le 5, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Körper wird zum Zeitpunkt $t = 0$ um Eins nach rechts ausgelenkt und losgelassen. Man bestimme die Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit, i.e. man bestimme $y(t)$.

Aufgabe 102. Man zeige die folgenden Eigenschaften des Faltungsproduktes:

(i) Kommutativität:

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1,$$

(ii) Distributivität:

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3.$$

Aufgabe 103. Man benutze den Faltungssatz um $q(t) = \mathcal{L}^{-1}(Q(s))$ zu finden, wobei

$$Q(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$$

und a eine positive Konstante ist. Das resultierende Faltungsintegral ist nicht zu berechnen.

Aufgabe 104. Wir betrachten die Funktionen $f(t)$, $g(t)$, wobei

$$f(t) = g(t) = H(t)$$

für $t \geq 0$. Man bestimme $f * g$ auf zwei verschiedenen Wegen:

(i) Durch direkte Berechnung des Faltungsintegrals.

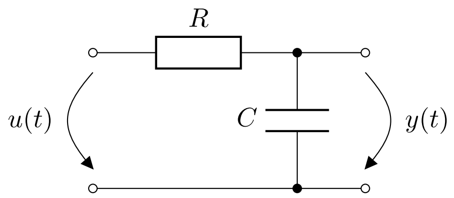
(ii) Durch Berechnung von $\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s))$, wobei $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$.

Aufgabe 105. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' + \alpha y = g(t), \\ \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

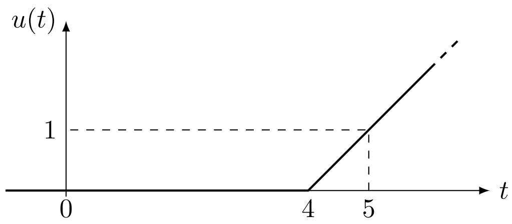
für eine beliebige Funktion $g(t)$, i.e. man finde eine Formel für $y(t)$ in welcher $g(t)$ auftritt. Hinweis: Für die Rücktransformation verwende man den Faltungssatz.

Aufgabe 106. Wir betrachten das RC-Glied mit Eingang $u(t)$:



(i) Man finde die Differentialgleichung für die Spannung $y(t)$.

(ii) Am Eingang liege die Spannung $u(t)$, gegeben durch:



und es sei $y(0) = 1$. Man bestimme $y(t)$.

(iii) Man skizziere qualitativ die Graphen der Funktionen $u(t)$, $y(t)$ in einer Grafik. Für die Skizze verwende man $R = 2000$, $C = 0.0005$.

Aufgabe 107. Sei

$$f(t) = H(t) - H(t-1).$$

(i) Man bestimme $(f * f)(t)$.

(ii) Man interpretiere das Faltungsprodukt $(f * f)(t)$ grafisch.

Aufgabe 108. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem für $y(t)$:

$$\begin{cases} y' + y = g, \\ \quad y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Die folgenden beiden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

(i) Es sei $y_0 \neq 0$ und $g(t) = 0$. Man bestimme $\varphi(t)$ so dass das Anfangswertproblem für $x(t)$:

$$\begin{cases} x' + x = \varphi, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

für $t > 0$ die selbe Lösung besitzt wie das obige Anfangswertproblem (1).

(ii) Es sei $y_0 = 0$ und $g(t)$ eine beliebige Funktion. Man zeige dass die Lösung des obigen Anfangswertproblems (1) gegeben ist durch

$$y(t) = (x * g)(t),$$

wobei $x(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' + x = \delta, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ist. Hier ist $\delta(t)$ die Diracsche Deltafunktion.

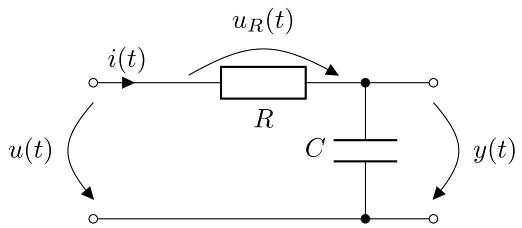
Aufgabe 109. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + e^t, \\ y'(t) = x(t) + y(t) + e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

Zwischenresultat zur Überprüfung: Die Bildfunktionen $X(s)$, $Y(s)$ schreiben sich als

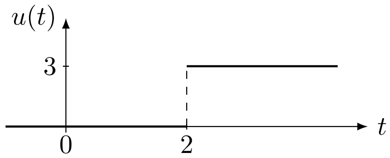
$$X(s) = -\frac{s^2}{(s-1)(s^2-2)}, \qquad Y(s) = \frac{s^2+2s}{(s-1)(s^2-2)}.$$

Aufgabe 110. Wir betrachten das RC-Glied:



(i) Man finde die Differentialgleichung für die Spannung $y(t)$.

(ii) Am Eingang liege die Spannung



und es sei $y(0) = 1$. Man bestimme und skizziere $y(t)$.

Lösung 62. Wir haben

$$\mathcal{L}\left(\sin(t)\right) = \int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt.$$

Durch partielle Integration folgt

$$\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt = \underbrace{\sin(t)\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt.$$

Für das auftretende Integral auf der rechten Seite verwenden wir nochmals partielle Integration:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt &= \frac{1}{s}\left(\underbrace{\cos(t)\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty}_{=\frac{1}{s}} - \frac{1}{s}\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt\right)\\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

Dies eingesetzt in der obigen Gleichung eingesetzt ergibt

$$\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt.$$

Diese Gleichung lässt sich nach $\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt$ auflösen:

$$\int_0^\infty \sin(t)e^{-st}dt = \frac{\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s^2+1},$$

i.e.

$$\mathcal{L}\left(\sin(t)\right) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Analog findet man

$$\mathcal{L}\left(\cos(t)\right) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Lösung 63.

(i) $\frac{1}{s-k}$
(ii) $\frac{s}{s^2-4}$
(iii) $\frac{3s+1}{s^2}$
(iv) $\frac{2}{s^3}$
(v) $\frac{1}{(s+1)^2}$

Lösung 64. $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$

Lösung 65.

(i)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\sin^2(t)\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(1-\cos(2t))\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(1\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\cos(2t)\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1}\\ &= \frac{2}{s^3+4s},\end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile die Ähnlichkeitseigenschaft verwendet haben.

(ii)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\cos^2(t)\right) &= \mathcal{L}\left((1-\sin^2(t))\right)\\ &= \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}\left(\sin^2(t)\right)\\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3+4s}\\ &= \frac{s^2+2}{s^3+4s}.\end{aligned}$$

Lösung 66. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt &= \int_0^2 (1-\tfrac{1}{2}t)e^{-st}dt\\ &= \int_0^2 e^{-st}dt - \frac{1}{2}\int_0^2 te^{-st}dt.\end{aligned}$$

Das erste Integral ist

$$\int_0^2 e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^2 = \frac{1}{s}(1-e^{-2s}).$$

Für das zweite Integral verwenden wir partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^2 te^{-st}dt &= -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^2 + \frac{1}{s}\int_0^2 e^{-st}dt\\ &= -\frac{2}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^2\\ &= -\frac{2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}(e^{-2s}-1).\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \frac{1}{s}(1-e^{-2s}) + \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{2s^2}(e^{-2s}-1)\\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{2s^2}(e^{-2s}-1).\end{aligned}$$

Lösung 67.

(i) $\mathcal{L}\left((1+t)^2\right) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3}$

(ii) $\mathcal{L}(\cos(4t)) = \frac{s}{s^2+16}$

(iii) $\mathcal{L}\left(3e^{-t}+\sin(6t)\right) = \frac{3}{1+s} + \frac{6}{36+s^2}$

(iv) $\mathcal{L}\left(e^{-t}(t^2+1)\right) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$

(v) $\mathcal{L}\left((3t)^5\right) = \frac{29160}{s^6}$

(vi) $\mathcal{L}\left(e^{\lambda t}\right) = \frac{1}{s-\lambda}$

(vii) $\mathcal{L}\left(e^{at}\cos(\omega t)\right) = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$

(viii) $\mathcal{L}(\cos(t)-\sin(3t)) = \frac{s}{1+s^2} - \frac{3}{9+s^2}$

(ix) $\mathcal{L}\left(e^{at}\sin(\omega t)\right) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

(x) $\mathcal{L}\left(Ae^{-\delta t}\sin(\omega t)\right) = \frac{A\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}$

Lösung 68. Die drei Integrale können als Laplacetransformationen aufgefasst werden:

(i) $F(s) = \int_0^\infty e^{-7t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left(e^{-7t}\right) = \frac{1}{s+7}$

(ii) $G(s) = \int_0^\infty t^2e^{3t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left(t^2e^{3t}\right) = \frac{2}{(s-3)^3}$

(iii) $H(s) = \int_0^\infty 4\sin(6t)e^{-st}dt = \mathcal{L}(4\sin(6t)) = \frac{24}{s^2+36}$

Lösung 69.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 4t & 0 \le t < 2 \\ 4t + t^2 & 2 \le t < 4 \\ 4t + t^2 + \frac{3}{4}t^3 & 4 \le t < 5 \\ t^2 + \frac{3}{4}t^3 & 5 \le t \end{cases}$$

Lösung 70.

(i) $f(t) = H(t - t_0)(t - t_0)$, $\mathcal{L}(f(t)) = e^{-st_0}\frac{1}{s^2}$
(ii) $g(t) = H(t-1)(t-1)^2$, $\mathcal{L}(g(t)) = e^{-s}\frac{2}{s^3}$
(iii) $k(t) = (H(t) - H(t-3))e^{-t}$, $\mathcal{L}(k(t)) = \frac{1-e^{-3(s+1)}}{s+1}$

Lösung 71.

(i) Wir haben

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 3 \\ 0 & 3 \le t \end{cases}$$

(ii) Nein, da $f(3) = 1 \neq 0 = g(3)$.
(iii) Die Laplacetransformation, welche durch ein Integral definiert ist, unterscheidet sich nicht, i.e. $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(g(t)) = \int_0^3 e^{-st}dt$.

Lösung 72.

(i) $\frac{2}{s^3}e^{-4s}$
(ii) $\frac{1}{s-1}e^{-Ts}$
(iii) Wir haben

$$f(t) = e^{-3}H(t-3)e^{-(t-3)}.$$

Somit

$$\mathcal{L}(f(t)) = e^{-3}\mathcal{L}\left(H(t-3)e^{-(t-3)}\right) = e^{-3}\frac{e^{-3s}}{s+1} = \frac{e^{-3(1+s)}}{s+1},$$

wobei wir für die zweite Gleichung den Verschiebungssatz verwendet haben.
(iv) $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\left(((t-1)+1)^3 H(t-1)\right) = e^{-s}\mathcal{L}\left((t+1)^3\right) = e^{-s}\mathcal{L}\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1\right) = e^{-s}\left(\frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$

Lösung 73. $\mathcal{L}(2t) = \frac{2}{s^2}$, $\mathcal{L}(2) = \frac{2}{s}$.

Lösung 74.

(i) Es handelt sich um eine Summe von Elementarfunktionen und für die Transformation werden keine zusätzlichen Eigenschaften verwendet. Wir haben

$$\mathcal{L}\left(t^2 + 2t + 1\right) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

(ii) Wir benötigen ein kombiniertes Diagramm mit den Eigenschaften Dämpfung, Ähnlichkeit und Ableitung Bildbereich. Wir arrangieren das Diagramm so, dass die Ableitung im Bildbereich möglichst einfach bestimmbar ist. Dies wird erreicht indem der Faktor $(-t)$ im Originalbereich als letztes rückgängig gemacht wird:

$$\begin{tikzcd}
-\frac{1}{2}\sin(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot(-t)"'] & -\frac{1}{2(s^2+1)} \arrow[d, "\frac{d}{ds}"] \\
\frac{t}{2}\sin(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto 2t"'] & \frac{s}{(s^2+1)^2} \arrow[d] \\
t\sin(2t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-3t}"'] & \frac{4s}{(s^2+4)^2} \arrow[d, "s\mapsto s+3"] \\
te^{-3t}\sin(2t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{4(s+3)}{((s+3)^2+4)^2}
\end{tikzcd}$$

I.e.

$$\mathcal{L}\left(te^{-3t}\sin(2t)\right) = \frac{4(s+3)}{((s+3)^2+4)^2}.$$

Lösung 75. $\mathcal{L}\left(t^2e^{at}\right) = \frac{2}{(s-a)^3}$.

Lösung 76.

(i) $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{(s+2)e^{-2s-4}}{s^2+4s+29}$

(ii) $\mathcal{L}\left(g(t)\right) = \frac{(s+2)e^{-2s}}{s^2+4s+29}$

Lösung 77.

(i) $f(t) = (H(t) - H(t-1))t$. $\mathcal{L}\left(f(t)\right)$ findet man durch das Diagramm der Verschiebung.

(ii) $x(t) = t - 1 + e^{-t} - H(t-1)(t-1)$.

Lösung 78. $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{6}{s^3} - e^{-4s}\left(\frac{6}{s^3} + \frac{22}{s^2} + \frac{43}{s}\right) - e^{-6s}\left(\frac{4}{s} + \frac{2}{s^2}\right)$,
$\mathcal{L}\left(g(t)\right) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}$.

Lösung 79. Die Funktion kann im Intervall $t \in [0, a)$ geschrieben werden als $f(t) = \frac{A}{a}t$. Somit ist die Transformation gegeben durch

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{A}{a(1-e^{-sa})}\int_0^a te^{-st}dt.$$

Das Resultat folgt durch partielle Integration.

Lösung 80. Wir haben

$$\mathcal{L}\left(g(t)\right) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 (1-e^{-t})e^{-st}dt.$$

Mit

$$\int_0^2 (1-e^{-t})e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^2 + \left.\frac{e^{-(s+1)t}}{s+1}\right|_0^2 = \frac{1}{s}(1-e^{-2s}) - \frac{1}{s+1}(1-e^{-2(s+1)})$$

folgt

$$\mathcal{L}\left(g(t)\right) = \frac{1}{s} - \frac{1-e^{-2(s+1)}}{(s+1)(1-e^{-2s})}.$$

Lösung 81.

(i) Mit Hilfe der Heavisidefunktion haben wir

$$f(t) = \Big(H(t) - H(t-2)\Big)(1 - \tfrac{1}{2}t).$$

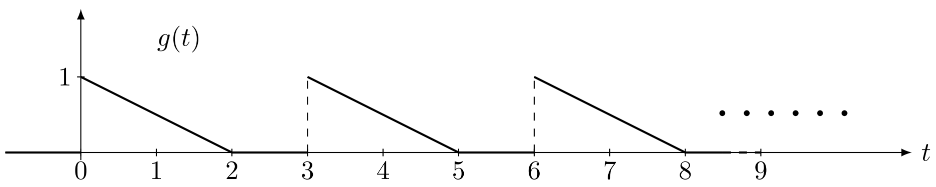
Die Laplacetransformationen sind

$$H(t)(1-\tfrac{1}{2}t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{2s^2}$$

$$\begin{tikzcd}
H(t)(-\tfrac{t}{2}) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto t-2"'] & -\tfrac{1}{2s^2} \arrow[d, "\cdot e^{-2s}"] \\
H(t-2)(1-\tfrac{1}{2}t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & -\tfrac{e^{-2s}}{2s^2}
\end{tikzcd}$$

wobei wir für die zweite Transformation die Eigenschaft der Zeitverschiebung benutzt haben. Wir finden die selbe Transformation wie in (i).

(ii)



Die Transformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(g(t)\right) &= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T g(t)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-3s}} \int_0^3 f(t)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-3s}} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2s^2}(e^{-2s}-1)\right).
\end{aligned}$$

Lösung 82. Der Beweis beruht auf der Substitution $u = t - a$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(H(t-a)f(t-a)\right) &= \int_0^\infty H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}du \\
&= e^{-as} \underbrace{\int_0^\infty f(u)e^{-su}du}_{=F(s)} \\
&= e^{-as}F(s).
\end{aligned}$$

Lösung 83. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)s^2}\right) = t - \sin(t)$.

Lösung 84.

(i) Es handelt sich um Transformationen von Elementarfunktionen. Wir haben

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s} - \frac{3}{s-8}\right) = 6 - 3e^{8t}.$$

(ii) Wir schreiben um

$$\frac{1}{4s^2+2s+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}$$

wobei wir für die zweite Gleichung quadratisch ergänzt haben. Nun verwenden wir das Diagramm der Eigenschaften Dämpfung und Ähnlichkeit:

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto \frac{\sqrt{3}}{4}t"'] & \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{s^2+1} \arrow[d] \\
\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{4}t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-\frac{t}{4}}"'] & \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+\frac{3}{16}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s\right)^2+1} \arrow[d, "s\mapsto s+\frac{1}{4}"] \\
\frac{e^{-\frac{t}{4}}}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{4}t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{4}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4s^2+2s+1}\right) = \frac{e^{-\frac{t}{4}}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right).$$

Lösung 85.

(i) $\frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-7t}$
(ii) $2e^{3t} - e^{-t}$
(iii) $-\frac{1}{3}t - \frac{4}{9}e^{-3t} + \frac{4}{9}$
(iv) $2\cos(2t) + 3\sin(2t)$
(v) $\frac{1}{16}t - \frac{1}{64}\sin(4t)$
(vi) $(\cos(t) + 6\sin(t))e^{-2t}$
(vii) $-\frac{1}{16}(\cos(2t) + 2\sin(2t))e^{-2t} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}$
(viii) $2te^{-t} - e^{-t} + e^{t}$
(ix) $(\cos(2t) + 3\sin(2t))e^{-t}$
(x) $\frac{11}{2}e^{3t} - 3e^{2t} + \frac{1}{2}e^{t}$
(xi) $\frac{1}{2}\sin(t/2)$
(xii) $H(t-1)\cos(t-1)$

Lösung 86.

(i) Mit quadratischer Ergänzung schreiben wir um:

$$\frac{7}{2s^2+4s+10} = \frac{17}{2}\frac{1}{(s+1)^2+4}$$

Nun verwenden wir das Diagramm der Eigenschaften Dämpfung und Ähnlichkeit:

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{2}\sin(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto 2t"'] & \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} \arrow[d] \\
\frac{1}{2}\sin(2t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-t}"'] & \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1} \arrow[d, "s\mapsto s+1"] \\
\frac{e^{-t}}{2}\sin(2t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{(s+1)^2+4}
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten somit

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{17}{2s^2+4s+10}\right) = \frac{17}{4}e^{-t}\sin(2t).$$

(ii) Wir haben

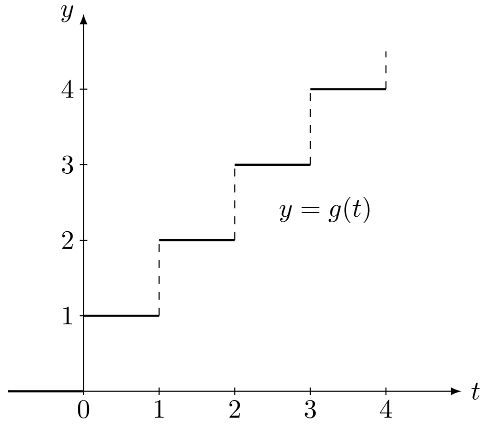
$$G(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-s}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-sk}}{s}.$$

Mit

$$\begin{tikzcd}
H(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto t-k"'] & \frac{1}{s} \arrow[d, "\cdot e^{-sk}"] \\
H(t-k) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{s}e^{-sk}
\end{tikzcd}$$

haben wir

$$\mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-sk}}{s}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}H(t-k).$$

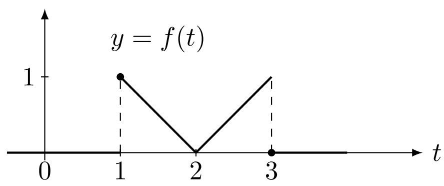


Lösung 87. $y(t) = -(2t+1)e^{-t} + e^{2t}$.

Lösung 88. $y(t) = -\frac{1}{4}(2t+1)e^{t} + \frac{5}{4}e^{3t}$

Lösung 89. $x(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4}H(t-2)\left(1-\cos(2t-4)\right)$

Lösung 90.



Wir sehen dass

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1, \\ |2-t| & 1 \le t < 3, \\ 0 & 3 \le t. \end{cases}$$

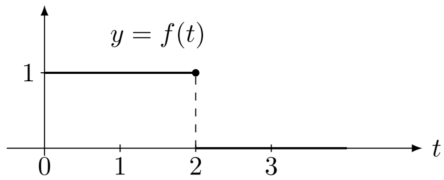
Somit können wir $f(t)$ schreiben als

$$f(t) = (2-t)(H(t-1) - H(t-2)) + (t-2)(H(t-2) - H(t-3)).$$

Die Laplacetransformierte davon ist

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-s} + \frac{2}{s^2}e^{-2s} - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-3s}.$$

Lösung 91.



Wir sehen dass

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2, \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$

Diese Funktion stimmt mit der Funktion

$$g(t) = H(t) - H(t-2)$$

überein, ausser im Punkt $t = 2$ ($f(2) = 1 \neq 0 = g(2)$). Somit haben wir

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \mathcal{L}\left(g(t)\right) = \mathcal{L}\left(H(t)\right) - \mathcal{L}\left(H(t-2)\right) = \frac{1-e^{-2s}}{s}.$$

Lösung 92. Wir schreiben die Störfunktion mit Hilfe der Heavisidefunktion als

$$g(t) = \Big(H(t) - H(t-\tfrac{1}{2})\Big)r.$$

Mit

$$\mathcal{L}\left(H(t)r\right) = \frac{r}{s}, \qquad \mathcal{L}\left(H(t-\tfrac{1}{2})r\right) = \frac{r}{s}e^{-\frac{1}{2}s},$$

folgt die Laplacetransformation der Störfunktion

$$G(s) = \mathcal{L}\left(g(t)\right) = \frac{r}{s}(1-e^{-\frac{1}{2}s}).$$

Die Laplacetransformation der Differentialgleichung ist somit

$$sX(s) - x(0) + kX(s) = \frac{r}{s}(1-e^{-\frac{1}{2}s}).$$

Aufgelöst nach $X(s)$:

$$X(s) = \frac{A}{s+k} + \frac{r}{s(s+k)} - \frac{r}{s(s+k)}e^{-\frac{1}{2}s}.$$

Die Rücktransformation des ersten Terms ist

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s+k}\right) = Ae^{-kt}.$$

Für die Rücktransformation des zweite Terms machen wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s(s+k)} = \frac{1}{ks} - \frac{1}{k(s+k)}.$$

Somit ist die Rücktransformation des zweiten Terms

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{r}{s(s+k)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{r}{ks}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{r}{k(s+k)}\right) \\ &= \frac{r}{k} - \frac{r}{k}e^{-kt} \\ &= \frac{r}{k}(1-e^{-kt}). \end{aligned}$$

Für die Rücktransformation des dritten Terms verwenden wir die Rücktransformation des zweiten Terms zusammen mit der Eigenschaft Zeitverschiebung. Wir erhalten

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{r}{s(s+k)}e^{-\frac{1}{2}s}\right) = H(t-\tfrac{1}{2})\frac{r}{k}\left(1-e^{-k(t-\frac{1}{2})}\right).$$

Somit folgt

$$x(t) = Ae^{-kt} + \frac{r}{k}(1-e^{-kt}) - H(t-\tfrac{1}{2})\frac{r}{k}\left(1-e^{-k(t-\frac{1}{2})}\right).$$

Lösung 93.

(i) $1 + e^{-2}$

(ii) 0, da 2 ausserhalb des Integrationsbereiches liegt.

Lösung 94. Wir haben

$$\int_0^1 \sin^2(\pi(t - t_0))\delta(t - 1/2)dt = \sin^2(\pi(1/2 - t_0)) \overset{!}{=} \frac{3}{4}.$$

I.e.

$$\sin(\pi(1/2 - t_0)) \overset{!}{=} \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Somit ist ein möglicher Wert gegeben durch $\pi(1/2 - t_0) = \pi/3$. I.e. ein möglicher Wert ist $t_0 = 1/6$.

Lösung 95.

(i) (a) Laplacetransformation führt auf

$$\begin{aligned} 2(sX - \beta) + X &= 0, \\ X(s) &= \frac{2\beta}{2s+1} = \frac{\beta}{s + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$x(t) = \beta e^{-\frac{1}{2}t}.$$

(b) Laplacetransformation führt auf

$$\begin{aligned} s^4 Y - s^3 + s - Y &= 0, \\ Y(s^4 - 1) &= s^3 - s, \\ Y(s) &= \frac{s^3 - s}{s^4 - 1} = \frac{s}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$y(t) = \cos(t).$$

(ii) Wir schreiben um

$$\frac{1}{4s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{4}\frac{1}{s^2 + \frac{s}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}$$

wobei wir für die zweite Gleichung quadratisch ergänzt haben. Nun verwenden wir das Diagramm der Eigenschaften Dämpfung und Ähnlichkeit:

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto\frac{\sqrt{3}}{4}t"'] & \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{s^2+1} \arrow[d] \\
\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{4}t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-\frac{t}{4}}"'] & \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+\frac{3}{16}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}s\right)^2+1} \arrow[d, "s\mapsto s+\frac{1}{4}"] \\
\frac{e^{-\frac{t}{4}}}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{4}t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{4}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4s^2 + 2s + 1}\right) = \frac{e^{-\frac{t}{4}}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right).$$

(iii) Der Beweis beruht auf partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) &= \int_0^\infty \frac{df}{dt}(t)e^{-st}dt \\
&= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}_{=F(s)} \\
&= -f(0) + sF(s).
\end{aligned}$$

Lösung 96.

(i) Wir schreiben

$$\begin{aligned}
F(s) = \frac{1}{as^2+bs+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{s^2+\frac{b}{a}s+\frac{c}{a}} &= \frac{1}{a}\frac{1}{\left(s+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}} \\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{\left(s+\frac{b}{2a}\right)^2+\lambda^2},
\end{aligned}$$

wobei wir quadratisch ergänzt haben und

$$\lambda^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} > 0$$

verwendet haben. Die Rücktransformation erfolgt mit dem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{\lambda}\sin(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t\mapsto\lambda t"'] & \frac{1}{\lambda}\frac{1}{s^2+1} \arrow[d, "s\mapsto\frac{s}{\lambda}, \cdot\frac{1}{\lambda}"] \\
\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-\frac{b}{2a}t}"'] & \frac{1}{s^2+\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\left(\frac{s}{\lambda}\right)^2+1} \arrow[d, "s\mapsto s+\frac{b}{2a}"] \\
\frac{e^{-\frac{b}{2a}t}}{\lambda}\sin(\lambda t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{\left(s+\frac{b}{2a}\right)^2+\lambda^2}
\end{tikzcd}$$

Somit

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) = \frac{e^{-\frac{b}{2a}t}}{a\lambda}\sin(\lambda t) = \frac{e^{-\frac{b}{2a}t}}{\sqrt{ac-\frac{b^2}{4}}}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}\,t\right).$$

(ii) Wir schreiben

$$F(s) = \frac{1}{as^2+bs+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{\left(s+\frac{b}{2a}\right)^2-\Lambda^2},$$

wobei wir

$$\Lambda^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} > 0$$

verwenden. Für die Rücktransformation betrachten wir in einem ersten Schritt

$$G(s) = \frac{1}{s^2-\Lambda^2}$$

und kompensieren die Verschiebung im Frequenzbereich anschliessend. Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{1}{s^2-\Lambda^2} = \frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{1}{s-\Lambda} - \frac{1}{s+\Lambda}\right).$$

Dies ergibt

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\right) = \frac{1}{2\Lambda}\left(e^{\Lambda t} - e^{-\Lambda t}\right)$$

und somit

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{e^{-\frac{b}{2a}t}}{a} g(t) = \frac{e^{-\frac{b}{2a}t}}{2a\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}} \left(e^{\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}t} - e^{-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}t} \right)$$

Lösung 97. Die Laplacetransformierte der Differentialgleichung ist

$$s^2 Y - sy_0 - y_0' + \alpha s Y - \alpha y_0 + \beta Y = 0.$$

Somit haben wir

$$Y(s) = \frac{sy_0 + y_0' + \alpha y_0}{s^2 + \alpha s + \beta} \stackrel{!}{=} \frac{2s - 1}{s^2 + s + 2}.$$

Es folgt

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad y_0 = 2, \quad y_0' = -3.$$

Lösung 98.

(i) Wir haben

$$\begin{aligned} u(t) &= (H(t) - H(t-T))\frac{t}{T} + H(t-T) \\ &= \frac{t}{T}H(t) + (1 - \frac{t}{T})H(t-T). \end{aligned}$$

(ii) Laplacetransformation ergibt

$$U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{Ts^2}(1 - e^{-Ts})$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{U(s)}{1 + RCs} = \frac{1}{Ts^2(1 + RCs)}(1 - e^{-Ts}) \\ &= \frac{1}{Ts^2(1 + RCs)} - \frac{e^{-Ts}}{Ts^2(1 + RCs)}. \end{aligned}$$

(iii) Wir machen den folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung ($k = RC$)

$$\frac{1}{s^2(1 + ks)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{1 + ks}.$$

Daraus ergibt sich

$$A = -k, \qquad B = 1, \qquad C = k^2.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(1 + RCs)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{RC}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R^2C^2}{1 + RCs}\right) \\ &= -RC + t + RCe^{-\frac{1}{RC}t}. \end{aligned}$$

Der zusätzliche Faktor e^{-sT} führt auf eine Verschiebung um T im Zeitbereich. Somit folgt

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{T}\left(-RC + t + RCe^{-\frac{1}{RC}t}\right) - \frac{H(t-T)}{T}\left(-RC + t - T + RCe^{-\frac{1}{RC}(t-T)}\right).$$

(iv) Wir haben

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 1.$$

Lösung 99. Die Differentialgleichung im Bildbereich wird zu

$$s^2Y - sy_0 - 2 + 2sY - 2y_0 + Y = 0.$$

Somit folgt

$$Y(s) = y_0\frac{s+2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$y(t) = y_0e^{-t} + (y_0+2)te^{-t}.$$

Die Bedingung $y(1) = 2$ wird zu

$$y_0e^{-1} + (y_0+2)e^{-1} = 2.$$

Daraus folgt $y_0 = e - 1$ und somit haben wir

$$y(t) = (e-1)e^{-t} + (e+1)te^{-t}.$$

Lösung 100.

(i) Wir haben

$$\begin{aligned} u(t) &= \Big(H(t-1) - H(t-3)\Big)\frac{1}{2}(t+1) + 2H(t-3) \\ &= \frac{1}{2}(t+1)H(t-1) - \frac{1}{2}\,(t-3)\,H(t-3). \end{aligned}$$

(ii) Wir haben

$$U(s) = \mathcal{L}\left(u(t)\right) = e^{-s}\left(\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{s}\right) - e^{-3s}\frac{1}{2s^2}.$$

(iii) Laplacetransformation der Differentialgleichung ergibt $sY+1+Y = U(s)$. Somit haben wir

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}\left(\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{s}\right) - \frac{e^{-3s}}{(s+1)2s^2} - \frac{1}{s+1}.$$

(iv) Für die Rücktransformation benutzen wir die Partialbruchzerlegungen

$$\frac{1}{(s+1)s^2} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}, \qquad \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{e^{-s}}{2}\left(\frac{1}{(s+1)s^2} + \frac{2}{s(s+1)}\right) - \frac{e^{-3s}}{2s^2(s+1)} - \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{e^{-s}}{2}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right) - \frac{e^{-3s}}{2}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Und somit

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = \frac{1}{2}H(t-1)\left(t - e^{-t+1}\right) - \frac{1}{2}H(t-3)\left(-4 + t + e^{-t+3}\right) - e^{-t}.$$

(v) Wir haben $\lim_{t\to\infty} y(t) = 2$.

Lösung 101. Die Bewegungsgleichung lautet $y'' + y = f(t)$. Laplacetransformiert mit $y(0) = 1$ ergibt

$$s^2Y - s + Y = F.$$

Mit $f(t) = H(t-1) - H(t-5)$ folgt $F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$. In der Differentialgleichung eingesetzt ergibt sich

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-5s}}{s(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1}.$$

Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}.$$

Somit folgt

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right) = H(t-1)(1-\cos(t-1)), \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-5s}}{s(s^2+1)}\right) = H(t-5)(1-\cos(t-5)).$$

Wir finden somit

$$y(t) = H(t-1)(1-\cos(t-1)) - H(t-5)(1-\cos(t-5)) + \cos(t).$$

Lösung 102.

(i) Wir verwenden die Substitution $v = t-u$:

$$\begin{aligned}(f_1 * f_2)(t) &= \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du \\ &= -\int_t^0 f_1(t-v)f_2(v)dv = \int_0^t f_1(t-v)f_2(v)dv = (f_2 * f_1)(t).\end{aligned}$$

(ii) Folgt aus der Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned}(f_1 * (f_2+f_3))(t) &= \int_0^t f_1(u)(f_2(t-u)+f_3(t-u))du \\ &= \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du + \int_0^t f_1(u)f_3(t-u)du = (f_1*f_2)(t) + (f_1*f_3)(t).\end{aligned}$$

Lösung 103. Wir haben

$$Q(s) = F(s)G(s),$$

wobei

$$F(s) = G(s) = \left(\frac{1}{s^2+a^2}\right).$$

Wir haben $f(t) = g(t) = \frac{1}{a}\sin(at)$. Somit

$$q(t) = (f*g)(t) = \frac{1}{a^2}\int_0^t \sin(at-au)\sin(au)du.$$

Lösung 104.

(i)

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du = \int_0^t H(t-u)H(u)du = \int_0^t du = t.$$

(ii) Wir haben

$$F(s) = G(s) = \mathcal{L}\left(H(t)\right) = \frac{1}{s}.$$

Somit ist

$$(f*g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t.$$

Lösung 105. Die Differentialgleichung im Bildbereich ist

$$sY - y_0 + \alpha Y = G,$$

wobei $G(s) = \mathcal{L}\left(g(t)\right)$. Somit ist die Lösung im Bildbereich

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+\alpha} + \frac{G(s)}{s+\alpha}.$$

Durch Faltung ist die Rücktransformation des zweiten Terms gegeben durch

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s+\alpha}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\right).$$

Mit

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = e^{-\alpha t}$$

folgt somit

$$y(t) = e^{-\alpha s}y_0 + e^{-\alpha t} * g(t) = e^{-\alpha t}y_0 + \int_0^t e^{-\alpha(t-u)}g(u)du.$$

Lösung 106.

(i) Maschensatz zusammen mit Kondensatorgesetz ergibt

$$RC\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = u(t).$$

(ii) Wir modellieren die Eingangsspannung als

$$u(t) = (t-4)H(t-4).$$

Somit haben wir

$$U(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2}.$$

und die Laplacetransformation der Differentialgleichung ist (wir verwenden $y(0) = 1$)

$$sRCY(s) - RC + Y(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2}.$$

Daraus folgt

$$Y(s) = \frac{1}{s+1/RC} + \frac{e^{-4s}}{RC}\frac{1}{s^2(s+1/RC)}.$$

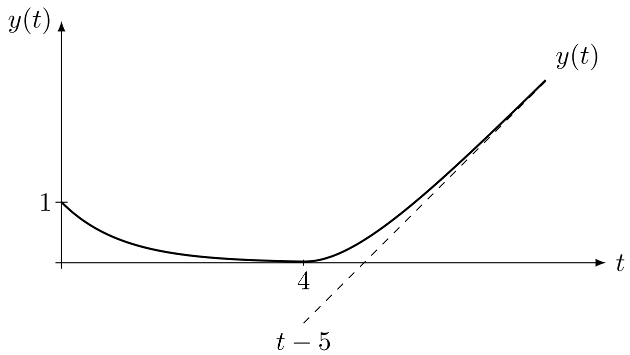
Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{1}{s^2(s+1/RC)} = -\frac{RC}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{RC}{s+1/RC}.$$

Rücktransformation ergibt

$$y(t) = e^{-\frac{t}{RC}} + \left(t - 4 + RC\left(e^{-\frac{t-4}{RC}} - 1\right)\right)H(t-4).$$

(iii)

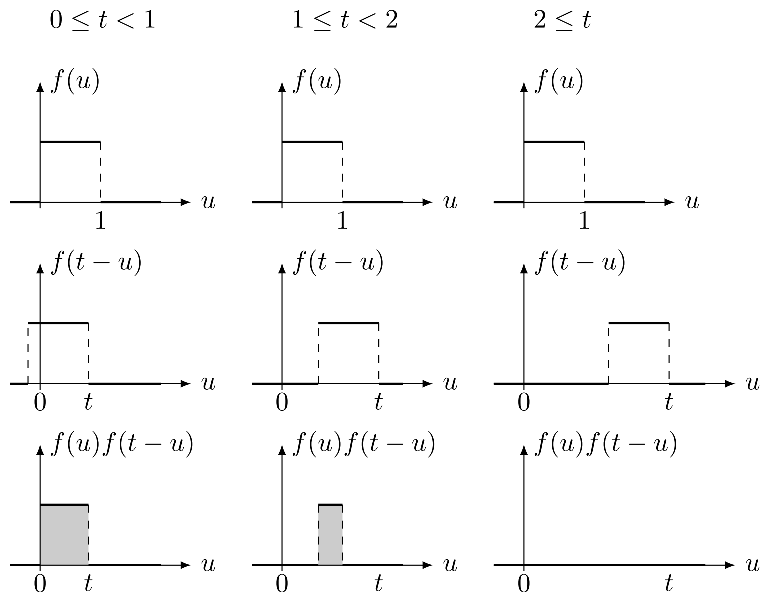


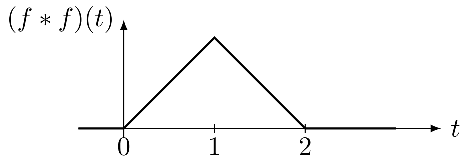
Lösung 107.

(i)

$$
\begin{aligned}
(f*f)(t) &= \int_0^t \Big(H(u)-H(u-1)\Big)\Big(H(t-u)-H(t-u-1)\Big)du \\
&= \begin{cases} \int_0^t H(t-u)du - \int_0^t H(t-u-1)du & t<1, \\ \int_0^1 H(t-u)du - \int_0^1 H(t-u-1)du & t \geq 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} t & t<1, \\ 1-(t-1) & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

(ii) Die geometrische Interpretation der Faltung entspricht dem Flächenüberlapp zwischen $f(u)$ und $f(t-u)$. Dieser wächst für $0 \leq t < 1$ linear, ist für $t=1$ maximal (die Funktionen $f(u)$, $f(t-u)$ liegen übereinander), und für $1 \leq t < 2$ fällt er linear. Für $t \geq 2$ verschwindet der Überlapp.





Lösung 108.

(i) Laplacetransformation der beiden Differentialgleichung mit Anfangswerten ergibt

$$sY(s) - y_0 + Y(s) = 0, \qquad sX(s) + X = \mathcal{L}\left(\varphi(t)\right),$$

i.e.

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+1}, \qquad X(s) = \frac{\mathcal{L}\left(\varphi(t)\right)}{s+1}.$$

Somit wählen wir $\varphi(t) = y_0 \delta(t)$.

(ii) Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' + x = \delta, \\ \quad x(0) = 0 \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s}\right).$$

Die Lösung des Anfangswertproblems mit $y_0 = 0$ und $g(t)$ einer beliebigen Funktion ist

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G}{s+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s}\right) * \mathcal{L}^{-1}(G).$$

Somit haben wir

$$y(t) = (x * g)(t).$$

Lösung 109. $x(t) = -\sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}t) - 2\cosh(\sqrt{2}t) + e^t$,
$y(t) = 3\sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}t) + 4\cosh(\sqrt{2}t) - 3e^t$,
wobei $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$

Lösung 110.

(i) $RC\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = u(t)$.

(ii) Wir modellieren die Eingangsspannung als $u(t) = 3H(t-2)$. Somit haben wir $U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = 3e^{-2s}/s$. Die Laplacetransformation der Differentialgleichung ist somit (wir verwenden $y(0) = 1$)

$$sRCY(s) - RC + Y(s) = \frac{3e^{-2s}}{s}.$$

Daraus folgt

$$Y(s) = \frac{1}{s + 1/RC} + \frac{3e^{-2s}}{RC}\frac{1}{s(s+1/RC)}.$$

Rücktransformation ergibt

$$y(t) = e^{-\frac{t}{RC}} + 3\left(1 - e^{-\frac{t-2}{RC}}\right)H(t-2).$$