LABORARBEIT
MATHEMATIK 1

LISIBACH ANDRÉ

1. Organisation

Die Abgabe der Arbeit erfolgt durch individuelle Präsentation und Besprechung der Resultate mit dem Dozenten (kein Bericht!). Bei der Bewertung werden $p \in \{0, 10\}$ Punkte vergeben, wobei p auch der Anzahl anzurechnender Prozentpunkte für die Gesamtnote in diesem Modul entspricht. Die Besprechung soll grundsätzlich während den Labornachmittagen oder während der zur Verfügung gestellten Zeit im Unterricht erfolgen. Andere Termine sind möglich, die Besprechung muss jedoch bis spätestens am 31.10.25 um 17:00 erfolgen.

2. Vorbereitung

Bearbeiten der Abschnitte 4.1, 4.2 und 4.3 im Skript. Diese Abschnitte behandeln das numerische Lösen von Differentialgleichungen mit Matlab.

3. Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Zwei Männer fahren mit einem kleinen Motorboot. Die Masse der Passagiere und des Bootes ist $m = 500$ und der Motor erzeugt eine konstante Kraft $F = 200$ (wir verwenden SI-Einheiten). Die Widerstandskraft des Wassers ist proportional zur Geschwindigkeit v des Bootes, mit einer Proportionalitätskonstanten $k = 10$.

(i) Man zeichne das Richtungsfeld für die Differentialgleichung im Bereich

$$(t, v) \in [0, 40] \times [0, 30].$$

(ii) Man bestimme die Lösung des Problems numerisch für die Anfangsbedingungen

$$v(0) \in \{0, 3, 6, \ldots, 30\}$$

und zeichne diese Lösungen im Richtungsfeld ein.

(iii) Man löse die obigen Teilaufgaben im Fall dass die Widerstandskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v des Bootes ist, mit der gleichen Proportionalitätskonstanten $k = 10$.

(iv) Man löse die obigen Teilaufgaben im Fall dass die Kraft des Motors oszilliert, i.e. gegeben ist durch

$$F(t) = F_0 + A \sin(2\pi f t),$$

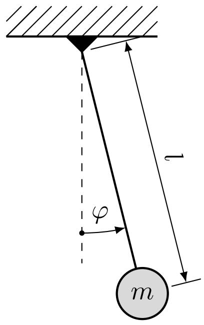
wobei $F_0 = A = 200$, $f = 0.5$.

Aufgabe 2:

Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels ist gegeben durch

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0,$$

wobei wir mit $\varphi(t)$ den Auslenkungswinkel aus der Ruhelage $\varphi = 0$, mit g die Gravitationskonstante in Erdnähe und mit l die Pendellänge bezeichnen.



(i) Man löse die Differentialgleichung für kleine Auslenkungen $\varphi(t)$ analytisch.

(ii) Man schreibe die Differentialgleichung zweiter Ordnung um auf ein System erster Ordnung.

(iii) Man löse das System in (ii) numerisch und vergleiche grafisch mit der Lösung aus (i). Man verwende dazu $\omega_0 = 1$ und die Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0.1, \frac{\pi}{2}, 0.99\pi, \pi, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

(iv) Man bestimme die Periodendauer in Abhängigkeit der Anfangsbedingung $\varphi(0)$ und zeichne diese Abhängigkeit. Hinweis: Der Befehl `[pks loc]=findpeaks(y)` speichert im Vektor `pks` die Maxima des Vektors `y` und im Vektor `loc` die Indizes bei welchen diese Maxima auftreten. Der Vektor `y` muss positive Einträge besitzen.

(v) Man zeichne die Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi}(0) = -1.5$$

und interpretiere das Resultat.