MATHEMATIK 2
FOURIERMETHODEN
VERSION 10. Februar 2026

LISIBACH ANDRÉ

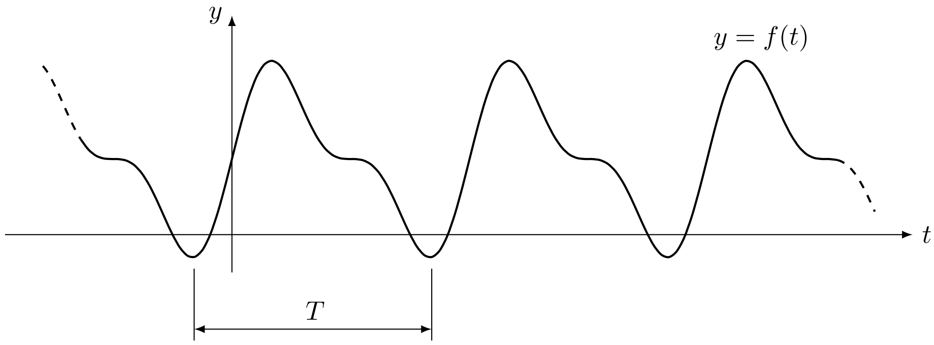
1. Fourierreihen

In Ingenieuranwendungen treten oft periodische Funktionen auf. Ihre Darstellung durch eine Summe aus einfachen periodische Funktionen, wie der Sinus- und Kosinusfunktion, ist von grosser praktischer Bedeutung. Diese Darstellung führt auf die Fourierreihe.

1.1. **Periodische Funktionen.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *periodisch* mit *Periode* T, falls ein $T > 0$ existiert, so dass

$$f(t+T) = f(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Der Graph einer periodischen Funktion entspricht einer periodischen repetition des Graphen in jedem Intervall der Länge T:



Im folgenden werden wir, falls nicht anders vermerkt, mit t die Zeit bezeichnen. Die *Frequenz* ν und die *Winkelfrequenz* ω sind gegeben durch

$$\nu = \frac{1}{T}, \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Beide Grössen besitzen die Einheit $\frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$. Beispielsweise besitzt die Funktion

$$u(t) = A\sin(3t)$$

die Kreisfrequenz $\omega = 3$ und Periode $T = \frac{2\pi}{3}$.

Aus $f(t+T) = f(t)$ folgt: Ist T eine Periode der Funktion $f(t)$, so ist jedes ganzzahlige Vielfache von T auch eine Periode von $f(t)$, i.e.

$$f(t+nT) = f(t).$$

Die kleinste Periode T einer Funktion $f(t)$ heisst *Grundperiode* der Funktion $f(t)$.

2. Aufgaben

Aufgabe 1

Man zeige: Ist T eine Periode der Funktion $f(t)$, so ist jedes ganzzahlige Vielfache von T auch eine Periode von $f(t)$.

Aufgabe 2

Man bestimme die Grundperiode der folgenden Funktionen:

(i) $f(t) = \cos(\omega t)$

(ii) $f(t) = \cos(\frac{2}{3}t) + \sin(\frac{2}{5}t)$

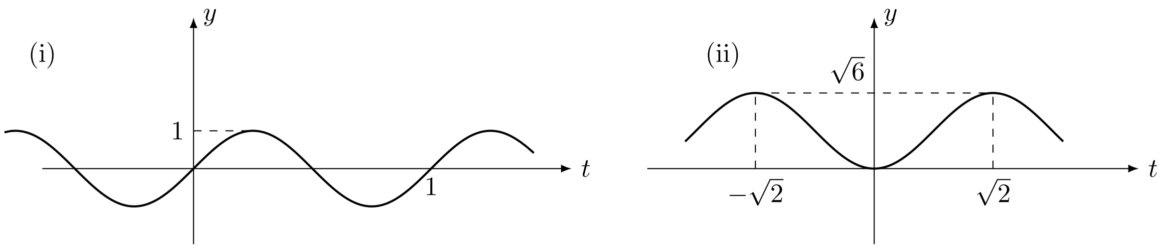
(iii) $f(t) = C = \text{konst.}$

(iv) $f(t) = \sin(2t) + \sin(2\pi t)$

Aufgabe 3

Die folgenden Graphen sind Sinusförmig. Man modelliere sie durch eine Funktion der Form

$$f(x) = A\cos(Bt + C) + D.$$



Hinweis: Es sind mehrere Antworten möglich, jedoch genügt es jeweils eine anzugeben.

3. Lösungen zu den Aufgaben

Lösung 1

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} f(t+nT) &= f(t+(n-1)T+T) \\ &= f(t+(n-1)T) \\ &= \dots \\ &= f(t), \end{aligned}$$

wobei wir von der ersten auf die zweite Zeile verwendet haben dass $f(t+T) = f(t)$, aber mit $t+(n-1)T$ in der Rolle von t.

Lösung 2

(i) $T = \frac{2\pi}{\omega}$

(ii) Die Funktion $f_1(t) = \cos(\frac{2}{3}t)$ besitzt Grundperiode $T_1 = 3\pi$, die Funktion $f_2(t) = \sin(\frac{2}{5}t)$ besitzt Grundperiode $T_2 = 5\pi$. Die Grundperiode der Funktion $f_1(t) + f_2(t)$ ist das kleinste gemeinsame ganzzahlige Vielfache der beiden Grundperioden, i.e. $T = 15\pi$.

(iii) Die konstante Funktion $f(t) = C$ ist periodisch da für beliebiges $T > 0$ gilt $f(t+T) = C = f(t)$. Jedoch gibt es somit kein kleinstes $T > 0$ und die Funktion $f(t) = C$ besitzt keine Grundperiode.

(iv) Die Funktion $f_1(t) = \sin(2t)$ besitzt Grundperiode $T_1 = \pi$, die Funktion $f_2(t) = \sin(2\pi t)$ besitzt Grundperiode $T_2 = 1$. Jedoch gibt es kein gemeinsames ganzzahliges Vielfaches dieser beiden Grundperioden (würde dieses existieren, so müsste gelten $m \cdot T_1 = n \cdot T_2$ für $m, n \in \mathbb{N}$, i.e. $m \cdot \pi = n$. Daraus folgt aber $\pi = n/m$ was im Wiederspruch zur Irrationalität von π steht). Somit besitzt die Funktion $f(t) = \sin(2t) + \sin(2\pi t)$ keine Grundperiode und ist somit nicht periodisch.

Lösung 3

(i) $f(x) = \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

(ii) $f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} t + \pi\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}$